מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ הרצאה 13

שלומי

<u>על ההתפלגות הגבולית של שרשרת בזמן רציף</u>

נתונה שרשרת בזמן רציף בעל יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

וקטור ההסתברויות הסטציונריות שלה הוא $(0.5,0.5)$. ניתן לקבל את התוצאה הזאת על-ידי פתירת מערכת משוואות לחישוב הוקטור הסטציונרי. נראה גם בדרך אחרת שזאת ההתפלגות הגבולית.

ניתן להציג את הסתברויות המעבר כסכום של טור $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$

כאשר הזמן שואף לאינסוף אז מספר הקפיצות המצטבר גם שואף לאינסוף. כאשר יש הרבה קפיצות אז מתקרבים לוקטור הסטציונרי שהוא וקטור ההסתברויות הגבוליות של מטריצת המעבר בזמן הקפיצות שהיא כאן

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ושיש לה וקטור סטציונרי $(0.5,0.5)$.

מכיון שהשרשרת המקורית היא שרשרת בזמן רציף, אז אין משמעות למחזוריות, כי קפיצות יכולות להתרחש בכל זמן.

<u>שאלה</u>

מדוע לשרשרת שלה היוצר

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

אין את אותה התפלגות גבולית כמו לשרשרת המייצגת את זמני הקפיצות שלה שהיא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

<u>תשובה</u>

כבר הסברנו שיש מצב שבו מתעכבים בממוצע פחות זמן לכל קפיצה.

אם נציג את התהליך כשעון פואסוני שלו קצב אחיד ומהמצב הראשון לא נקפוץ בכל פעימה של השעון, אז נשתמש במטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ובטור $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2t} \frac{(2t)^k}{k!} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ אז כאשר $t \to \infty$, מספר הקפיצות שואף לאינסוף. לכן נקבל שהוקטור הסטציונרי של השרשרת בזמן רציף שווה לוקטור הסטציונרי של מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם נציג את התהליך כסכום טור $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-4t} \frac{(4t)^k}{k!} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}^k$ אז נקבל שיש לו אותה הסתברות גבולית כמו למטריצת המעבר $\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.

מכאן גם לשתי מטריצות המעבר $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ יש את אותו וקטור סטציונרי.

<u>הערה</u> לגבי <u>רציפות ההתפלגות</u> של תהליך מרקוב בזמן רציף.
הראנו דרך למציאת מערכת משוואות דיפרנציאליות לחישוב הסתברויות המעבר בזמן סופי.
בכך למעשה גם הראינו שהסתברויות המעבר $P_{i,j}(t)$ הן גזירות. לכן למעשה הראינו גם שהן רציפות.

<u>שאלה</u>
נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף $X(t)$ בעלת המצבים $\{1,2\}$ ובעלת יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מצאו $\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{X(2t)}{X(t)}\right)$.

<u>פתרון</u>
בשרשרת זו יש וקטור סטציונרי יחיד $(0.5,0.5)$.
יש שאיפה של המשתנים $X(t)$ ו $X(2t)$ למשתנים בעלי התפלגות סטציונרית. כמו כן, כאשר $t\to\infty$ התלות בין המשתנים נעלמת כי יש רווח זמן ששואף לאינסוף בינהם. כל אחד משני המשתנים מקבל את הערכים 1 ו 2 בהסתברויות ששואפות להיות שוות וזאת בלי קשר למצב ההתחלתי.
לכן מתקיים:

$$\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{X(2t)}{X(t)}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2} = 1.125$$

<u>סוגיה</u>
נסתכל על שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ ובעלת יוצר

$$\begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -(2\lambda_3) & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & -(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 > 0$.

אילו ערכים יכול לקבל $\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{X(2t)}{X(t)}\right)$?

<u>פתרון</u>
כאשר $t\to\infty$ יש שאיפה של זוג המשתנים $X(t)$ ו $X(2t)$, למשתנים בלתי תלויים בעלי התפלגויות שוליות שהן ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת. מכיון שהשרשרת בלתי פריקה, אז כל אחד מהערכים $\{1,2,3\}$ מתקבל בהסתברות חיובית ממש. בגלל שההתפלגויות של $X(t)$ ושל $X(2t)$ הן דומות אז כל ערך מתקבל בהסתברות זהה להסתברות שמתקבל הערך ההופכי שלו. יש סימטריה בין המצבים 1 ו 3, לכן כל מנה שבה משתתף 1 מתקבלת באותה הסתברות כמו מנה שבה משתתף 3. מהסימטריה בין כל מספר להופכי שלו מתקבל שלא יכול להתקבל גבול קטן מ 1. גם גבול ששווה ל 1 לא יכול להתקבל כי השרשרת בלתי פריקה ולכן ישוקללו גם ממוצעים של מספרים שונים מ 1 וההופכי שלהם. יכול להתקבל כל גבול שקרוב כרצוננו ל1, אך גדול מ 1. את זה נקבל אם נבחר פרמטרים שיקרבו את ההסתברות

הסטציונרית של מצב 2 ל 1. אם מצד שני נקרב את ההסתברויות הסטציונריות של מצבים 1 ו 3 ל 0.5 , אז נוכל לקבל גבול שקרוב כרצוננו ל $\frac{4}{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{3}{1}+\frac{3}{3}\right)$. אבל זהו חסם עליון שלא ניתן להשיג אותו כי כל ממוצע בין המנות בהם משתתפים מספרים מתוך קבוצת המצבים הוא קטן יותר.
(בכל שקלול בו משתתף 2, יש אותן הסתברויות ל $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ו $\frac{3}{2}$).

<u>שאלה</u>
נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ על קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

נגדיר תהליך

$$Y_n=\begin{cases} a & X_n\in\{1,2\} \\ b & X_n=3 \end{cases}$$

האם התהליך $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב הומוגנית על מרחב המצבים $\{a,b\}$?

<u>פתרון</u>
זאת היא שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

<u>הסבר</u>: אם נמצאים במצב 1 או במצב 2 ולא משנה באיזה מהם, יש מעבר למצב 3 בהסתברות 0.3 . המעברים למצב 3 הם זהים משני מצבים אלה. לכן ההיסטוריה וזהות התקופה לא מוסיפים אינפורמציה רלוונטית.

<u>שאלה</u>
בהתייחס לשאלה הקודמת,
<u>א</u>. האם היה ניתן לשאול את אותה שאלה ולקבל את אותה תשובה חיובית בהתייחס למטריצה 3×3 שכל אבריה חיובים ממש ושרק זוג אחד מתשעת אבריה הוא זהה וכל יתר אברי המטריצה הם שונים כל אחד מכל האחרים ?
<u>ב</u>. האם היה ניתן לשאול את אותה שאלה ולקבל את אותה תשובה חיובית בהתייחס למטריצה 3×3 שכל אבריה הם חיובים ממש ושכולם שונים אחד מהשני ?

<u>פתרון</u>
<u>א</u>. כן
מספיק ש $P_{2,3}=P_{1,3}$ כדי שבלי שום קשר לעבר ולזהותה של התקופה, סיכויי המעבר ממצב a למצב b יהיו שווים ל $P_{1,3}$.
<u>ב</u>. כן

מספיק ש $P_{1,1}/P_{1,2}=P_{2,1}/P_{2,2}=P_{3,1}/P_{3,2}$ כדי שבלי שום קשר לעבר ולזהות התקופה, בהינתן שאנו במצב a אז ההסתברות שאנו למעשה במצב 1 היא $\frac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}}=\frac{P_{2,1}}{P_{2,1}+P_{2,2}}=\frac{P_{3,1}}{P_{3,1}+P_{3,2}}$

וההסתברות שאנו למעשה במצב 2 היא $\frac{P_{1,2}}{P_{1,1}+P_{1,2}}=\frac{P_{2,2}}{P_{2,1}+P_{2,2}}=\frac{P_{3,2}}{P_{3,1}+P_{3,2}}$.

כך ההסתברות לעבור ממצב a למצב b היא $\frac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}}P_{1,3}+\frac{P_{1,2}}{P_{1,1}+P_{1,2}}P_{2,3}$.

נוסיף את התנאי שבשלב ההתחלתי אנו במצב b , כך בכל שלב שאנו במצב a , אנו למעשה במצב 1 בסיכוי $\frac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}}$.

דוגמא למטריצת מעבר שעונה על הדרישות היא: $\begin{pmatrix} 0.62 & 0.31 & 0.07 \\ 0.42 & 0.21 & 0.37 \\ 0.22 & 0.11 & 0.67 \end{pmatrix}$

<u>שאלה</u>

יהי A_n - המאורע שבשלב ה- n נבקר במצב i מסוים קבוע.

<u>א</u>. עבור אילו סוגים של מצבים קיים $\lim_{n\to\infty}P(A_n)$?

<u>ב</u>. עבור איזה סוג של מצבים קיים $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$ עבור כל מצב התחלתי ?

<u>פתרון</u>

<u>א</u>. למשל מצבים סופגים: במקרה זה הגבול שווה להסתברות להגיע אליהם.
מצבים חולפים או מצבים נשנים אפס: במקרים אלה הגבול שווה לאפס עבור כל מצב התחלתי.
וגם כל מצב נשנה חיובי לא מחזורי: במקרה זה הגבול שווה למכפלה של ההסתברות להגיע אליו בהסתברות הסטציונרית שלו. במקרה זה הגבול תלוי בזהות המצב ההתחלתי- בהסתברות להגיע אליו מהמצב ההתחלתי.
אם מצב הוא נשנה חיובי ומחזורי אז הגבול לא קיים עבור כל מצב התחלתי. למשל ממנו עצמו ניתן להגיע אל עצמו רק במספרים מסוימים של צעדים (כפולות של המחזור). ממצבים אחרים יכולים להיות מספר תתי גבולות, אם כי יתכן שיש מצבים התחלתים שמהם כל תתי הגבולות שווים. למשל בדוגמא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(מהמצב הראשון מגיעים למצב 3 במספר זוגי של צעדים בסיכוי חצי ובמספר אי-זוגי בסיכוי חצי).

<u>ב</u>. מצבים סופגים: אם מגיעים אליהם, אז לעולם לא עוזבים אותם. למשל מצב 0 בתהליך הסתעפות.
או מצבים שמשום מצב לא ניתן להגיע אליהם.

שאלה

נתונה מערכת תור עם שרת אחד ושני מקומות המתנה. בזמן נתון השרת יכול לתת שרות ללקוח אחד. כאשר השרת עסוק ומגיע לקוח, אז אם יש מקום המתנה פנוי, אז הלקוח מצטרף לתור הממתינים לשרות. אם שני מקומות ההמתנה תפוסים, אז לקוח שמגיע נדחה ועוזב את התחנה. נניח שקצב במגיעים לתחנה הוא פואסוני בעצמה λ ושרות של לקוח בודד מתפלג $\exp(\mu)$.

א. מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של התהליך.

ב. מצאו את וקטור ההסתברויות הסטציונריות של התהליך.

ג. מהי לטווח ארוך פרופורצית הלקוחות שמגיעים לתחנה ונדחים ?

תשובה

א. מצבי השרשרת הם

0- תחנה ריקה

1- יש לקוח אחד בשרות

2- יש בתחנה שני לקוחות שאחד מהם הוא בשרות והאחר בהמתנה

3- יש בתחנה שלושה לקוחות שמהם אחד בשרות ושני האחרים בהמתנה

היוצר הוא

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

ב. נתן מערכת לחישוב הוקטור הסטציונרי

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ (\mu+\lambda)\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ (\mu+\lambda)\pi_2 = \lambda\pi_1 + \mu\pi_3 \\ \mu\pi_3 = \lambda\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

ג. הלקוחות שנדחים הם הלקוחות שמגיעים כאשר בתחנה יש שלושה לקוחות, זאת אומרת אחד בשרות ושניים בהמתנה. שכיחות דחיית הלקוחות היא השכיחות של מצב 3 שהיא π_3.

שאלה

נתונה מערכת תור עם שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. לתחנה מגיעים צרכנים בזרם פואסוני בעל עצמה 1. שירות של כל צרכן לוקח בדיוק יחידת זמן אחת. נסתכל על התהליך $X(t)$ של מספר הצרכנים שבמערכת בזמן t.

א. האם התהליך הזה הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?

ב. האם השרשרת המייצגת את מספר הצרכנים שבמערכת בזמני הקפיצות ממצב למצב, היא שרשרת מרקוב בזמן בדיד ?

ג. האם השרשרת המייצגת את מספר הצרכנים שבמערכת בזמני סיום השרות היא שרשרת מרקוב בזמן בדיד ?

פתרון

א. בשרשרת מרקוב בזמן רציף, זמן השהות במצב מתפלג מעריכית. כאן עבור כל מצב $i \geq 1$, לא

לא נשהה בו ברציפות יותר מיחידת זמן אחת (יתכן שפחות). משתנה שחסום על-ידי קבוע איננו משתנה מעריכי.

ב. במצבים השונים יש קפיצות מהם שיכולות להיגרם מהצטרפות לקוח או עזיבת לקוח.

לא אם אנו במצב 2 והיינו קודם במצב 3 אז העזיבה הבאה תבוא בעוד יחידת זמן אחת ואם קודם היינו במצב 1 אז העזיבה הבאה תבוא בעוד פחות מיחידת זמן אחת כי אנו כבר היינו בזמן שירות. לכן במקרה זה ההסתברות שהקפיצה הבאה תהיה של עזיבה היא גדולה יותר מאשר

במקרה הראשון.

ג. מספר הצרכנים שבמערכת בזמן סיום שירות נותן לנו את כל האינפורמציה להמשך. אם כן המערכת לא נשארה ריקה אז יש התפלגות קבועה של מספר המגיעים לשירות עד תום השירות הקרוב. אם המערכת נשארה ריקה אז יש את אותה התפלגות של מספר המגיעים עד תום השירות הבא.

סוגיה

ההסתברויות הסטציונריות של שרשרת מרקוב אי פריקה ניתנות על-ידי $\pi_i = (1-\alpha)\alpha^i$ עבור $i = 0,1,2,\cdots$.

א. הוכיחו שאם $\alpha < \frac{1}{2}$ אז $P_{0,0} > 0$.

ב. עבור $\alpha = \frac{1}{2}$, תנו דוגמא למטריצת מעבר שבה $P_{0,0} = 0$.

פתרון

א. אם $a < 0.5$ אז כאן $\pi_0 > 0.5$. מתקיים תמיד: $\pi_0 = \pi_0 P_{0,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{i,0}$

אילו היה מתקיים $P_{0,0} = 0$ אז היינו מקבלים:

$$\pi_0 \le \pi_0 \cdot 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot 1 = 1 - \pi_0 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_0 \le 0.5$$

אך כאמור $\pi_0 > 0.5$ ומתקבלת סתירה.

פתרון בדרך נוספת

מכיון ש $\pi_0 \ge 0.5$ אז תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא קטנה מ 2. לכן לא יתכן שבהסתברות 1 נחזור למצב 0 ביותר מצעד אחד (לפחות שני צעדים). לכן יש הסתברות חיובית שנחזור למצב 0 בצעד אחד.

הערה

אם יש הסתברות חיובית לחזור למצב 0 צעד אחד לאחר שהתחלנו בו, אז מצב 0 הוא לא מחזורי וקיימת הסתברות גבולית להיות בו. הסתברות זו שווה להסתברות הסטציונרית של המצב.

ב. נניח שמתקיים עבור כל $i \ge 1$: $P_{i,0} = 1$, מתקיים עבור כל $i \ge 1$: $P_{0,i} = 0.5^i$ ($\sum_{i=1}^{\infty} 0.5^i = 1$)

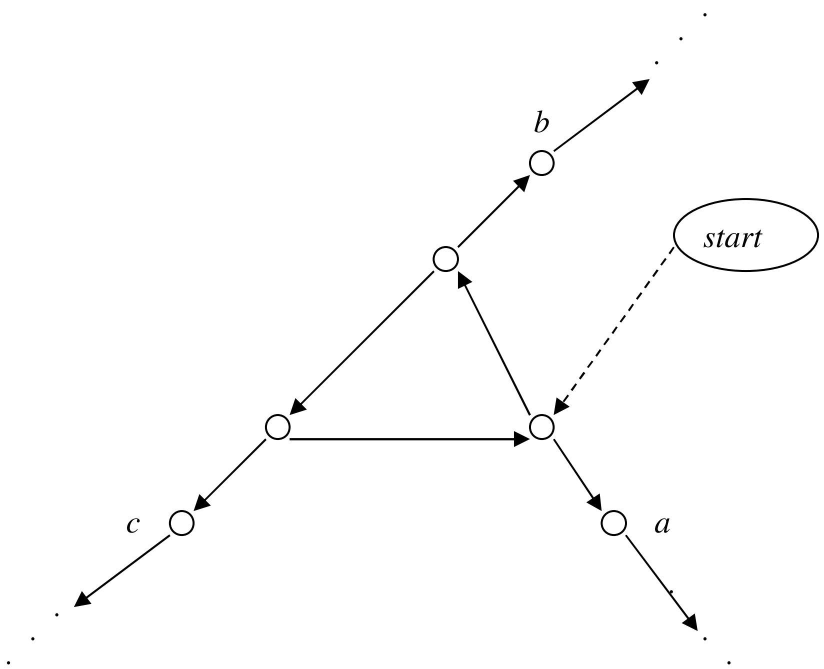
ומתקיים $P_{0,0} = 0$. שימו לב ש $\pi_0 = 0.5$ ($\pi_0 = \pi_0 \cdot 0 + (1-\pi_0) \cdot 1$).

הערה

במקרה זה שכיחות הביקורים במצב 0 היא 0.5 (מבלים במצב 0 במחצית מהצעדים). אבל לא קיימת הסתברות גבולית לבקר במצב 0 (אם מתחילים בו, אז ההסתברות לבקר בו בצעד זוגי היא 1 וההסתברות לבקר בו בצעד אי זוגי היא 0).

סוגיה

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף:



כאשר נמצאים בנקודה אז יש זרימה בעצמה λ עם כיוון החץ ויש זרימה בעצמה μ כנגד כיוון החץ.
השאלה היא, מהי ההסתברות להקלט בכל אחד מהענפים כאשר מתחילים במצב המסומן.

<u>פתרון</u>
שכבה i תהיה קבוצת הנקודות שמרחקן מהמשולש הוא i. יסמנו פה את הסיכויים להקלט a_i, b_i, c_i בענפים השונים. נחשב את הסיכוי לחזור אי פעם משכבה 1 למשולש. אם סיכוי זה הוא p אז הסיכוי לחזור משכבה 2 הוא p^2 כי ממנה צריך לחזור קודם ל 1 וזה קורה בסיכוי p.

$$p = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot 1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}p^2$$

מכיון שלא בטוח שנחזור למשולש באיזשהו שלב, אז הפתרון המבוקש הוא הפתרון שקטן מ 1. פתרון זה הוא $\frac{\mu}{\lambda}$. לכן בהסתברות $\frac{\lambda-\mu}{\lambda}$ בטוח נהיה ביציאה שעליה אנו נמצאים ובסיכוי $\frac{\mu}{\lambda}$ נחזור פעם לשכבה 0 ולמצב ההתחלתי בבעיה שלנו והסיכויים יהיו a_0, b_0, c_0 כמו בבעיה שלנו.

$$\begin{cases}
a_0 = \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\cdot 1 + \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda}\cdot a_0 + \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot b_0 + \frac{\mu}{2\lambda+\mu}\cdot c_0 \\
b_0 = \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\cdot 0 + \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda}\cdot b_0 + \frac{\mu}{2\lambda+\mu}\cdot a_0 + \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot c_0 \\
c_0 = \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\cdot 0 + \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda}\cdot c_0 + \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot a_0 + \frac{\mu}{2\lambda+\mu}\cdot b_0
\end{cases}$$

(אם עוברים על צלע במשולש אז מתחלפים התפקידים בין a_0, b_0, c_0)
אפשר להחליף את המשוואה הראשונה במשוואה פשוטה יותר $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.
(משיקולי סמטריה, סכום ההסתברויות להקלט בזרוע a מהזרועות השונות שווה לסכום ההסתברויות להקלט בזרועות השונות כשמתחילים בזרוע a. סכום זה הוא 1).

גרסא של החוק החזק

תהי $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות ב"ת. נניח שמתקיים $P(X_1=1)=p$, $P(X_1=0)=1-p$. על הסדרה הזאת חל החוק החזק (הם בעלי מומנט רביעי סופי קבוע והם ב"ת).

המשמעות של קיום החוק החזק על הסדרה, היא שעבור כל $\varepsilon>0$ בהסתברות 1 , $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ סוטה מ p , שהיא תוחלת הממוצע, ביותר מ ε רק עבור מספר סופי של ערכי n .

ננסה לחסום את ההסתברות $P\left(\left|\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-p\right|>\varepsilon\right)$ בעזרת אי שיוויון צ'בישב.

נקבל חסם ששווה ל $\dfrac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}=\dfrac{nV(X_1)}{n^2\varepsilon^2}=V\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)/\varepsilon^2$.

מכיון ש $\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=\infty$ $\approx \sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}$, אז לא ניתן להוכיח באמצעות שימוש ישיר באי שיוויון צ'בישב והלמה של בורל קנטלי, שהחוק חל על הסדרה.

אך ננסה בכל זאת להוכיח בעזרת אי שיוויון צ'בישב והלמה של בורל קנטלי שהחוק החזק חל על הסדרה.

נסתכל על נקודות a_i שלמות המוגדרות בצורה הבאה: $a_1=\left\lceil\dfrac{100}{\varepsilon^2}\right\rceil$ ועבור כל $i\ge 1$:

$a_{i+1}=a_i+\left\lfloor\sqrt{a_i}\right\rfloor$.

<u>טענה</u>

אם בנקודה a_i אין סטייה ביותר מ $\dfrac{\varepsilon}{2}$, אז בכל הנקודות שבין a_i ל a_{i+1}, אין סטייה ביותר מ ε .

<u>הסבר</u>

המרחק בין a_2 ל a_1 לא מהווה יותר מחלק ה $\dfrac{\varepsilon}{10}$ מגודלו של a_1. מכיון שהסדרה $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא מונוטונית עולה, אז עבור $i\ge 2$, $\sqrt{a_i}$ מהווה חלק עוד יותר קטן מ a_i. לכן עבור כל $i\ge 1$ מתקיים

$a_{i+1}-a_i\le\dfrac{\varepsilon}{10}a_i$.

אם בנקודה a_i מתקיים שהסטייה של הממוצע מתוחלתו קטנה מ $\dfrac{\varepsilon}{2}$, אז בכל הנקודות שבין a_i ל a_{i+1} , הסטייה לא גדולה מ $\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{10}$ (המקרה הקיצוני הוא שכל התוצאות בנקודות שבין a_i ל a_{i+1} הן מאותו סוג).

לכן אפשרית סטייה ביותר מ ε רק בקטעים שבין a_i ל a_{i+1} , רק כאשר ב a_i היתה סטייה גדולה מ $\frac{\varepsilon}{2}$.

מכיון שבכל קטע כזה יש רק מספר סופי של שלמים, אז די להוכיח שרק במספר סופי של ערכי a_i תהיה סטייה גדולה מ $\frac{\varepsilon}{2}$.

<u>טענה</u>

עבור כל t טבעי יש לא יותר מ $3\cdot 2^t$ נקודות a_i בין 4^t ל 4^{t+1}.

<u>הסבר</u>

עבור כל $a_i \ge 4^t$ מתקיים $a_{i+1}-a_i \ge \sqrt{4^t}=2^t$. אורך הקטע שבין 4^t ל 4^{t+1} הוא $3\cdot 4^t$ והוא מתחלק לקטעים זרים שכל אחד מהם לא קטן מ 2^t.

עבור נקודה a_i שבין 4^t ל 4^{t+1} ננסה לחסום בעזרת אי שיוויון צ'בישב את ההסתברות לסטייה של יותר מ $\frac{\varepsilon}{2}$ בין הממוצע לתוחלתו. נקבל חסם

$$\frac{V(X_1)}{a_i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \le \frac{1}{4^t\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}=\frac{1}{4^{t-1}\varepsilon^2}$$

אם A_i הוא המאורע שבנקודה a_i יש סטייה של יותר מ $\frac{\varepsilon}{2}$, אז אם $4^t \le a_i < 4^{t+1}$, אז מתקיים $P(A_i) \le \frac{1}{4^{t-1}\varepsilon^2}$.

כעת נסתכל על $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

סכום ההסתברויות עבור i שעבורם $4^t \le a_i < 4^{t+1}$ הוא לא יותר מ $3\cdot 2^t \frac{1}{4^{t-1}\varepsilon^2}=\frac{3}{2^{t-2}\varepsilon^2}$.

אם נסכום את ההסתברויות של המאורעות A_i, נקבל $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{3}{2^{t-2}\varepsilon^2}=\frac{12}{\varepsilon^2}<\infty$.

לכן לפי הלמה של בורל קנטלי, יתקבלו סטיות גדולות מ $\frac{\varepsilon}{2}$, רק במספר סופי של נקודות a_i, ולכן יתקבלו רק מספר סופי של סטיות גדולות מ ε בנקודות שלמות בכלל.