מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ סדרות של משתנים

שלומי

נדון תחילה בסדרות של מאורעות. כל מאורע בסדרה יכול להתקיים או לא להתקיים.

שאלות למוטיבציה

מבצעים אינסוף הטלות בלתי תלויות של מטבעות. האם התוצאה 1 תתקבל אינסוף פעמים ?

א. אם בכל הטלה ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{3}$.

ב. אם עבור כל n ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{n}$ (במקרה זה כל מטבע מקבל תוצאה 1 בסיכוי שונה).

ג. אם עבור כל n ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{n^2}$ (במקרה זה כל מטבע מקבל תוצאה 1 בסיכוי שונה).

הגדרה

תהי נתונה סדרה של מאורעות A_i. אומרים שהמאורעות מתרחשים $i.o.$ אם מתרחשים אינסוף מאורעות A_i ($i.o.$ זה ראשי תיבות ל infinity often).

הערה שתובהר בהמשך

יש סדרות שלגביהן אפשר לקבוע מראש אם יתקיימו אינסוף מאורעות או לא. יש סדרות אחרות שלגביהן בהסתברות מסוימת שהיא בין 0 ל 1 זה מתרחש.

משפט (הלמה של בורל קנטלי)

תהי $(A_n \quad : \quad n \ge 1)$ סדרה אינסופית של מאורעות. אזי מתקיימות הטענות הבאות:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ אזי $P(A_n \quad i.o.) = 0$.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ והמשפחה $\{A_1, A_2, \cdots\}$ ב"ת אזי $P(A_n \quad i.o.) = 1$.

הוכחה

א. $(A_n \quad i.o.) \subset \bigcup_{k\ge m} A_k$ לכל $m \ge 1$ ולכן: $P(A_n \quad i.o.) \le P\left(\bigcup_{k\ge m} A_k\right) \le \sum_{k\ge m} P(A_k)$. אך, $\lim_{m\to\infty} \sum_{k\ge M} P(A_k) = 0$ (שהרי $\sum_{n\ge1} P(A_n) < \infty$: זהו טור מתכנס) ולכן $P(A_n \quad i.o.) = 0$.

ב. נוכיח ש- $P(A_n \quad i.o.)^c = 0$; כלומר: $P\left(\bigcup_{n\ge1}\bigcap_{k\ge n} A_k^c\right) = 0$. בשביל זה מספיק להראות ש- $P\left(\bigcap_{k\ge n} A_k^c\right) = 0$ לכל $n \ge 1$ (כי איחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס הוא בעל הסתברות אפס). אך, לכל $x \in \Re$ מתקיים $1 - x \le e^{-x}$ ולכן מאי-תלותם של המאורעות $A_n \quad n = 1,2,\cdots$ נקבל: $P\left(\bigcap_{k=n}^{n+j} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{n+j}\left(1 - P(A_k)\right) \le \prod_{k=n}^{n+j} e^{-P(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k)\right)$ וכאשר $j \to \infty$ גם $\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k) \to \infty$ (שהרי $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$) ולכן $\exp\left(-\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k)\right) \to 0$. מכאן:

$P\left(\bigcap_{k\ge n} A_k^c\right) = \lim_{j\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{n+j} A_k^c\right) = 0$ לכל $n \ge 1$.

כעת משהוכחנו את שתי הטענות שבלמה, נוכל לענות על שאלות המוטיבציה ששאלנו בתחילה.

מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}=\infty$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ ונתון שבכל אחד מהמקרים המאורעות הם בלתי תלויים, אז בשני הסעיפים הראשונים בהכרח יתקיימו אינסוף מאורעות. מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ אז במקרה השלישי בהסתברות 1 יתרחשו מספר סופי של מאורעות, זאת אפילו בלי הזדקקות לתנאי האי תלות.

<u>שאלה</u>

האם אפשר לוותר על תנאי האי תלות בחלק השני של הלמה ?

<u>תשובה</u> לא

נניח שמטילים מטבע הוגן בודד שעל בדיוק צד אחד שלו כתוב 1. נניח שכל אינסוף המאורעות הם זהים וכל אחד מהם שווה לאינדיקטור שהמטבע הראה 1. בסיכוי של חצי יתרחשו אינסוף מאורעות ובסיכוי של חצי לא יתרחש אף מאורע.

<u>שאלה</u>

תהי $\{X_n\}$ סדרה של משתנים $\exp(1)$. ב"ת.

האם יתרחשו אינסוף מאורעות $(X_n > c\log(n))$? מהו הגבול העליון של $\frac{X_n}{\log(n)}$?

<u>תשובה</u>

עבור משתנה $\exp(1)$ מתקיים עבור כל $a \ge 0$: $P(X \ge a)=e^{-a}$.

לכן כאן מתקיים עבור כל n : $P(X_n > c\log(n)) = e^{-c\log(n)} = n^{-c}$.

עבור $c \le 1$ מתקיים $\sum n^{-c} = \infty$ ועבור $c > 1$ מתקיים $\sum n^{-c} < \infty$.

לכן יתרחשו אינסוף מאורעות אם"ם $c \le 1$.

(תנאי האי תלות מאפשר שימוש גם בכיוון השני של הלמה)

עבור כל $\varepsilon > 0$ לא יהיו אינסוף משתנים X_n שיקיימו $X_n \ge (1+\varepsilon)\log(n)$.

לכן עבור כל ε הגבול העליון לא יהיה גדול מ $1+\varepsilon$.

מצד שני יהיו אינסוף משתני X_n כך ש $X_n \ge \log(n)$. לכן הגבול העליון הוא 1.

<u>שאלה</u>

קוף מקליד מעתה ועד עולם באופן אקראי על מקלדת. האם הוא יקליד לפחות פעם אחת ברצף את התנך ?

<u>תשובה</u> כן

התנך הוא ארוך מאוד אך אורכו הוא איזשהו M סופי. כל תו נבחר מבין מספר סופי a של תוים. בכל רצף של M הקלדות, הסיכוי להקליד את התנך הוא $\frac{1}{a^M}$. זהו מספר קבוע. רצפים שיש בינהם חפיפה הם תלויים. אך נבחר אוסף אינסופי של רצפים זרים. באוסף זה הרצף ה- k יתחיל במקום $kM+1$ עבור כל k טבעי. כך לא יהיו חפיפות בין הרצפים השונים ותהיה אי תלות בין המאורעות של הצלחה ברצפים שונים. נקבל אוסף של מאורעות בלתי תלויים שלכל אחד מהם יש הסתברות קבועה $\frac{1}{a^M}$.

לכן בהכרח יתרחשו אינסוף הקלדות של התנך.

<u>שאלה</u>

בשלב ה- n מוציאים כדור מכד שבו כדור לבן ו $n-1$ כדורים שחורים.

האם מתקיים שאינסוף פעמים נוציא כדור לבן ? האם לפחות 5 פעמים יהיה רצף של שני כדורים לבנים ?

<u>תשובה</u>

יהי A_n - המאורע של הוצאת כדור לבן בפעם ה- n , $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\sum P(A_n)=\sum \frac{1}{n}=\infty$, לכן אם מניחים שיש אי תלות בין המאורעות אז בהסתברות 1 יתרחשו ∞ הוצאות של כדורים לבנים.

יהי B_n - המאורע שבפעם ה- n וגם בפעם ה- $n+1$ נקבל כדור לבן. $P(B_n)=\frac{1}{n(n+1)}$

ו $\sum P(B_n)=\sum \frac{1}{n(n+1)}=1$. זה אומר לנו שלא יהיו אינסוף רצפים של שני כדורים לבנים. אך זה לא עונה לשאלה אם יהיו לפחות 5 רצפים. נתגבר על בעיה זו:
כמובן שיתכן שבהוצאה השניה יוצא כדור שחור. אם זה יתרחש אז הרצף הראשון לא יהיה של שני כדורים לבנים. מתקיים $\sum_{n=2}^{\infty} P(B_n)<1$ לכן לא ודאי שהחל מהרצף השני נקבל איזשהו רצף של שני כדורים לבנים. בסיכוי ששווה לפחות למכפלת ההסתברויות שהכדור הראשון שחור ובהמשך לא יהיה רצף של לבנים, נקבל שלא יהיה אף רצף של כדורים לבנים.

<u>שאלה</u>
בוחרים באקראי אחד משני כדים. באחד מהם יש שני כדורים לבנים ושלושה כדורים שחורים ובשני יש רק ארבעה כדורים שחורים. מהכד הנבחר מבצעים סדרה אינסופית של הוצאות עם החזרה של כדורים.
מהי ההסתברות שנוציא אינסוף כדורים לבנים ? איך זה מסתדר עם הלמה של בורל קנטלי ?
<u>תשובה</u>
אם יבחר הכד הראשון אז בודאות יהיו אינסוף כדורים לבנים (בדקו זאת לפי הלמה של בורל קנטלי).
אם יבחר הכד השני אז בודאות לא יהיה אף כדור לבן. לכן בסיכוי 0.5 יהיו אינסוף כדורים לבנים.
מתקיים שבכל הוצאה הסיכוי לכדור לבן הוא $\frac{1}{5}=0.5\cdot 0+0.5\cdot\frac{2}{5}$ ו $\sum \frac{1}{5}=\infty$, אך המאורעות הם תלויים ולכן התוצאה של הוצאה אחת מרמזת על התוצאה של הוצאה אחרת.

<u>שאלה</u>
נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

יש לבדוק לפי הלמה של בורל קנטלי האם אינסוף פעמים נבקר במצב 1.
יש לבדוק האם עבר כל n טבעי יהיה לנו רצף של n ביקורים במצב 1.

<u>תשובה</u>
בכל שלב באופן בלתי תלוי בשלבים הקודמים, ההסתברות לבקר במצב 1 היא 0.5. $\sum 0.5=\infty$ ולכן לפי הלמה נבקר אינסוף פעמים במצב 1.

בכל רצף של n זמנים עוקבים יהיה רצף של ביקורים במצב 1 בהסתברות $\frac{1}{2^n}$. שוב נבחר אוסף של אינסוף רצפים ללא כל חפיפה. הרצף ה- k יתחיל במקום ה- $kn+1$ עבור כל k טבעי. הודות לזרות, מה שקורה בכל רצף כזה הוא בלתי תלוי באחרים. מתקיים $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}=\infty$. לכן עבור כל n קבוע נקבל אינסוף רצפים באורך n בהסתברות 1. המאורע שיהיה קיים n שעבורו לא יהיה רצף מתאים הוא איחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס ולכן ההסתברות שלו היא אפס. לכן בהסתברות 1 נקבל שעבור כל n טבעי יהיו אינסוף רצפים מתאימים.

הילוך מקרי סימטרי על הישר

בתהליך זה קבוצת המצבים היא של כל השלמים ובכל שלב הולכים ימינה צעד אחד ושמאלה צעד אחד בסיכוי שווה ובאופן ב"ת בשלבים האחרים.

כאן נראה בעזרת הלמה של בורל קנטלי שמצבי התהליך הזה הם נשנים. בהמשך הקורס, כאשר יעמדו לרשותנו כלים נוספים, נוכל לתת לטענה זו מספר הוכחות נוספות שיהיו פשוטות יותר.

נראה שבהסתברות 1 מבקרים אין סוף פעמים במצב שבו מתחילים. נניח בלי הגבלת הכלליות שהמצב ההתחלתי הוא מצב 0. המאורעות של ביקורים במצב 0 בזמנים שונים אינם מאורעות ב"ת. לכן הוכחה לנשנות של מצב 0 לא יכולה להתבסס על הלמה של בורל קנטלי ועל כך שסכום ההסתברויות לבקר במצב 0 בשלבים שונים מסתכם באין סוף. בכל זאת נבסס הוכחה על הלמה של בורל קנטלי.

נסתכל על אוסף נקודות זמן $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שיוגדרו באופן הבא: $b_{1=}1$ ולכל $2 \le n < \infty$ יתקיים $b_n = b_{n-1} + {b_{n-1}}^2$. הרעיון הוא להראות שבהסתברות 1 באין סוף מנקודות זמן אלה נהיה משמאל לראשית או בראשית. באופן סימטרי לכך, נהיה גם באין סוף מנקודות זמן אלה ימינה לראשית או בראשית. אם אין סוף פעמים נמצאים משמאל לראשית ואין סוף פעמים נמצאים ימינה לראשית, אז חייבים לעבור בראשית אין סוף פעמים, וכך בהסתברות 1 מבקרים בראשית אין סוף פעמים. הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה ממש ולכן היא שואפת לאין סוף. בין נקודת הזמן b_{n-1} לנקודת הזמן b_n יש ${b_{n-1}}^2$ צעדים. אם בצעדים אלה נעשה b_{n-1} צעדים שמאלה יותר מאשר ימינה, אז לא נוכל להיות ימינה לראשית, וזאת בלי שום קשר למיקום שלנו לאחר b_{n-1} הצעדים הראשונים. על פי משפט הגבול המרכזי, ההסתברות לסטייה מהתוחלת בכל מספר שהוא בסדר גודל של שורש של מספר צעדים שואפת לגבול חיובי. לכן סכום ההסתברויות שבקטעים שונים תהיה סטייה כזאת הוא אין סוף. נגדיר סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא: המאורע A_n יהיה שב ${b_{n-1}}^2$ הצעדים שבין b_{n-1} ל b_n נעשה לפחות b_{n-1} צעדים שמאלה יותר מאשר ימינה. לפי הלמה של בורל קנטלי, בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות מבין $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

השתמשנו במשפט הגבול המרכזי. לפי משפט הגבול המרכזי, אם נתונה סדרה של משתנים מקריים ב"ת שווי התפלגות ובעלי שונות סופית, אז עבור מספר גדול n של משתנים מהסדרה, ההסתברות שהממוצע שלהם קטן מקבוע a שווה בקירוב ל $\phi\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)$, כאשר μ היא התוחלת של המשתנים, σ^2 היא השונות שלהם ו ϕ היא פונקצית ההסתברות המצטברת של משתנה נורמלי סטנדרטי שהיא חיובית בכל נקודה על הישר. בהילוך מקרי סימטרי, סדרת המשתנים הם של המהלכים בשלבים השונים. הם מקבלים את הערכים 1 ו -1 בסיכויים שווים, ולכן התוחלות שלהם שוות ל 0 והשונויות שלהם שוות ל 1. המאורע שסכום n משתנים קטן מ $-\sqrt{n}$ הוא המאורע שהממוצע שלהם קטן מ $-\frac{1}{\sqrt{n}}$. ההסתברות שהממוצע מקבל ערך קטן מ $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת ל $\phi(-1)$ כאשר $n \to \infty$.

חוקי גבול

יש משתנים שלהם יש תוחלת. אם יש למשתנה תוחלת היא יכולה להיות סופית או אינסופית. לסדרה של משתנים יש סדרה של ממוצעים מצטברים עד כל נקודת זמן. עבור כל נקודת זמן יש ממוצע מצטבר עד אותה נקודה. החוק החלש של המספרים הגדולים והחוק החזק של המספרים הגדולים הם שתי תכונות שונות המייצגות צורות שונות של התכנסויות של סדרת ממוצעים מצטברים לסדרת תוחלות מצטברות. לגבי כל סדרת משתנים מקריים, כל אחד מהחוקים חל עליה או שהוא לא חל עליה. נאפיין סוגים של סדרות של משתנים שעליהם חוק חל. כמו כן נדון בסדרות ספיצפיות.

החוק החלש

בחיי יום יום מבצעים מספר גדול של דגימות כדי לאמוד את הממוצע. התקוה היא שאם עוצרים לאחר הרבה נסיונות הממוצע יהיה קרוב לתוחלת (ניתן לדבר על תוחלת מסוימת אם המשתנים הם שווי תוחלות). הקריטריון הוא האם בנקודה בודדת הממוצע קרוב לתוחלת.

ניסוח החוק החלש

תהי $\{X_i\}_1^\infty$ סדרת משתנים שבה לגבי כל i למשתנה ה- i יש תוחלת μ_i. החוק החלש חל על הסדרה אם עבור כל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$.

<u>משפט</u>
על סדרת משתנים בלתי תלויים שלכל אחד מהם יש אותה שונות סופית σ^2, חל החוק החלש של המספרים הגדולים.

<u>הוכחה</u>
נשתמש בחסמים של אי-שיוויון צ'בישב. עבור $\varepsilon > 0$ מתקיים עבור משתנה X בעל שונות סופית σ^2 ש $P(|x - E(x)| > \varepsilon) < \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

מתקיים $E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}$ ובהסתמך על האי תלות מתקיים $Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

כעת באמצעות אי שיוויון צ'בישב נוכל לקבל את החסם $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}\right| > \varepsilon\right) < \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

כאשר $n \to \infty$ סדרת חסמים זו שואפת לאפס.

כפי שנראה בדוגמאות שינתנו בהמשך, החוק החלש של המספרים הגדולים יכול לחול גם על סדרת משתנים שלגביה לא חלים תנאי משפט זה.

<u>החוק החזק של המספרים הגדולים</u>
אם חל על סדרת משתנים מקריים אז אם מסתכלים על נקודת זמן מתקדמת אז בהסתברות מספיק גבוהה באותה נקודה הממוצע קרוב מספיק לתוחלת. אבל זה לא אומר שהחל מאותה נקודה בהסתברות מספיק גבוהה נקבל תמיד קרבה לתוחלת. הדבר דומה במידה מסוימת להבדל בין התכנסות סדרה לבין התכנסות טור. יכול להיות שהאיבר הכללי שואף לאפס אך זנב הטור לא שואף לאפס. יתכן מצב שבכל נקודה נהיה בהסתברות גדולה מספיק קרובים לתוחלת, אך בזמנים אקראים יהיו סטיות גדולות שאחר-כך יעלמו.
<u>ניסוח החוק החזק</u>
על סדרה של משתנים מקריים חל החוק החזק אם עבור כל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left|\frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} - \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i}{k}\right| > \varepsilon\right) = 0$$

שימו לב שהמאורעות שעליהם אנו מבצעים איחוד הם מאורעות יורדים, כאלה שכל אחד מהם מכיל את הבאים אחריו. החוק אומר שעבור כל ε בהסתברות 1תהיה נקודת זמן שהחל ממנה לעולם לא סטייה תהיה של יותר מ ε. זאת אומרת שסטייה גדולה מ ε תהיה רק מספר סופי של פעמים.

<u>משפט</u>
על סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט רביעי סופי, חל החוק החזק של המספרים הגדולים.

לשם פשטות רישום הביטויים נניח כאן שתוחלת המשתנים היא אפס. מכל משתנה בעל תוחלת אחרת אפשר לקבל משתנה בעל תוחלת אפס על-ידי הזזה. הזזה גם מזיזה את התוחלת באותו גודל.
ננסה להוכיח את הטענה באמצעות הלמה של בורל קנטלי תוך שימוש באי שיוויון צ'בישב.

עבור כל n קבוע נקבל חסם $\frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2} < P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right| > \varepsilon\right)$.

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2} = \infty$ ולכן לא ניתן באמצעות חסמים אלה לעשות שימוש בקריטריון של הלמה.

לכן נצטרך להשיג חסמים יותר טובים. הנחנו שלכל המשתנים שווי ההתפלגות יש מומנט רביעי סופי. קיום מומנט מסוים סופי גורר גם את סופיות כל המומנטים הנמוכים יותר.

<u>הוכחה שהחוק החזק חל על סדרה זו</u>
באי שיוויון צ'בישב אנו למעשה מפעילים את אי שיוויון מרקוב על רבועי הסטיות מהתוחלת. רבועי הסטיות הן אי שליליות ותוחלתן היא השונות. כאן נפעיל את אי שיוויון מרקוב על החזקות הרבעיות של הסטיות מהתוחלת. החזקות הרבעיות הן גם אי שליליות והנחנו כאן שהן שוות לקבוע סופי.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right) = P\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 > n^4\varepsilon^4\right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 = \sum_{i-1}^{n} E\left(X_i^4\right) + \sum_{i\neq j}\binom{4}{2}E\left(X_i^2X_j^2\right) + \sum_{i\neq j}\binom{4}{3}E\left(X_i^3X_j\right) +$$

$$+\sum_{i,j,k}\binom{4}{2}\binom{2}{1}E\left(X_i^2X_jX_k\right) + \sum_{i,j,k,l}4!E\left(X_iX_jX_kX_l\right)$$

מכיוון שהמשתנים הם בלתי תלויים אז מומנט של מכפלה שווה למכפלת המומנטים. מכיון שהנחנו שהתוחלת היא אפס אז כל מכפלה של מומנטים שבה מופיע גם מומנט ראשון של משתנה שווה לאפס. כמו-כן מכיוון שהמשתנים הם שווי התפלגות אז המומנטים של משתנים שונים הם שווים.

נקבל חסם $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 = nA + \binom{4}{2}\binom{n}{2}B^2 < nA + 6n^2B^2$. כאשר A ו B הם המומנטים הרביעי והשני של המשתנים.

כעת נפעיל את אי שיוויון מרקוב $\frac{nA+6n^2B^2}{n^4\varepsilon^4} < P\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 > n^4\varepsilon^4\right)$. וזה מתנהג כמו $\frac{1}{n^2}$.

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$. לכן בהסתברות 1 רק מספר סופי של פעמים הממוצע יסטה מהתוחלת ביותר מ ε . כך עבור כל ε . לכן על הסדרה חל החוק החזק של המספרים הגדולים.

נתן <u>דוגמא</u> שבה החוק החזק חל על סדרה למרות שהמשתנים הם תלויים.

יהי $P(X_1=0)=P(X_1=1)=0.5$. נניח שאם $(X_1=0)$ אז עבור כל $i\geq 2$ מתקיים
$P(X_i=0)=1$ ואם $(X_1=1)$ אז עבור כל $i\geq 2$ מתקיים $P(X_i=-1)=P(X_i=1)=0.5$ באופן
בלתי תלוי ביניהם בהינתן ש $(X_1=1)$.
המשתנים הם תלויים כי למשל עבור כל $i\geq 2$: $P(X_i=-1 \mid X_1=0)=0<P(X_i=-1 \mid X_1=1)$
עבור כל $i\geq 2$: $E(X_i)=0.5\cdot 0+0.5(0.5\cdot(-1)+0.5\cdot 1)=0$. רק למשתנה X_1 יש תוחלת
ששונה מ 0 (שווה 0.5). לכן סדרת התוחלות מצטברות של המשתנים שואפת ל 0.
אם $(X_1=0)$ אז כל המשתנים מקבלים ערך 0 ולכן סדרת הממוצעים היא של אפסים והיא שואפת
לסדרת התוחלות.
בהינתן ש $(X_1=1)$ אז הסדרה של המשתנים הבאים היא סדרה בלתי תלויה של משתנים בעלי מומנט
רביעי סופי $0.5\cdot(-1)^4+0.5\cdot 1^4=1$, לכן על סדרה זו חל החוק החזק וסדרת הממוצעים שלה שואפת
ל 0 שהיא התוחלת של המשתנים. לכן סדרת הממוצעים של הסדרה כולה כולל X_1 שואפת לאפס שהיא
התוחלת (ההשפעה של משתנה בודד נעשית זניחה).
לכן בכל מקרה סדרת הממוצעים שואפת לאפס והחוק החזק חל על הסדרה למרות שהמשתנים תלויים.

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{-1,0,+1\}$ ומטריצת מעבר $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

נניח ש $X_0=0$, זאת אומרת שמתחילים במצב 0.

האם על סדרת המשתנים $X_0,X_1,X_2,\cdots$ חל החוק החזק של המספרים הגדולים ?

<u>תשובה</u>

לא. וגם לא חל על הסדרה החוק החלש של המספרים הגדולים.
נימוק: אם מתחילים במצב 0 אז בסיכוי 0.5 מגיעים למצב -1 ובסיכוי 0.5 מגיעים למצב 1.
בזה שמבניהם שמגיעים אליו נשארים תמיד. מראש התוחלת של כל X_i היא אפס. אבל סדרת הממוצעים
לא שואפת ל 0. היא מקבלת בסיכוי 0.5 את הערך -1 ובסיכוי 0.5 את הערך 1.