מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ הרצאה 3

שלומי

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב על קבוצת המצבים שהם כל השלמים. בכל שלב בהסתברות 0.5 הולכים ימינה 3 צעדים ובסיכוי 0.5 הולכים שמאלה צעד אחד.
בהסתמך על החוק החזק של המספרים הגדולים, קבעו אם מצב 0 הוא נשנה.

<u>תשובה</u>

יהי X_i הסטייה בשלב ה- i. מכיון שהמשתנים X_i הם משתנים חסומים אז יש להם מומנט רביעי חסום ולכן על סדרת משתנים בלתי תלויים זאת חל החוק החזק של המספרים הגדולים. התוחלת של כל אחד מהמשתנים האלה היא $0.5\cdot 3+0.5\cdot(-1)=1$. מכיון שהחוק החזק של המספרים הגדולים חל על הסדרה אז מתקיים שהממוצע המצטבר של המשתנים יסטה מ 1 בלמשל יותר מ 0.5 רק מספר סופי של פעמים. לכן הממוצע ישווה לאפס רק מספר סופי של פעמים. לכן כשמתחילים במצב 0 נבקר במצב 0 רק מספר סופי של פעמים. לכן הוא מצב חולף.

<u>שאלה</u>

האם ניתן לקבוע אם מצב 0 הוא חולף, רק בהסתמך על החוק החלש של המספרים הגדולים ?

<u>תשובה</u>

לא.
החוק החלש חל על הסדרה, הוא אומר רק שכאשר הזמן שואף לאינסוף, תשאף ההסתברות שהממוצע יהיה רחוק מ 1 בלמשל יותר מ 0.5 לאפס. זאת אומרת שההסתברות שהסכום המצטבר יהיה 0 תשאף לאפס. אבל זה לא אומר שלא נהיה במצב 0 מספר אינסופי של פעמים.

<u>שאלה</u>

יהיו $X_1,X_2,...$ סדרת משתנים. מתקיים $P(X_1=0)=1$, עבור $i\ge 2$ התפלגות X_i נקבעת על-פי הערכים שקבלו $X_1,X_2,...,X_{i-1}$. מתקיים $X_i=-\left(\sum_{k=1}^{i-1}X_k\right)+Y_i$ כאשר המשתנים Y_i הם בלתי תלויים ומקיימים $P(Y_i=0)=1-\frac{2}{i}$, $P(Y_i=i)=P(Y_i=-i)=\frac{1}{i}$

<u>א</u>. הראו שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה.
<u>ב</u>. הראו שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה.

<u>פתרון</u>

<u>א</u>. בכדי שעל הסדרה יחול החוק החזק, צריכה סדרת הממוצעים המצטברים לשאוף לסדרת התוחלות המצטברות, זאת בהסתברות 1. כאן סדרת הסכומים המצטברים $\{S_i\}$ שווה למעשה לסדרה $\{Y_i\}$.
לכל i , Y_i הוא בעל תוחלת אפס לכן אילו החוק החזק היה חל על הסדרה היתה צריכה הסדרה $\left\{\frac{Y_i}{i}\right\}$ לשאוף לאפס בהסתברות 1. המאורעות $A_i=(Y_i=i)$ הם בלתי תלויים ומתקיים $\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$, לכן לפי הלמה של בורל קנטלי, בהסתברות 1, אין סוף פעמים $\left(\frac{S_i}{i}=1\right)$
לכן אין התכנסות של הסדרה $\left\{\frac{S_i}{i}\right\}$.

ב. כאמור $E\left(\frac{S_i}{i}\right)=E\left(\frac{Y_i}{i}\right)=0$. מתקיים $P\left(\frac{S_i}{i}\neq 0\right)=\frac{2}{i}$ אך $\lim_{i\to\infty}\left(\frac{2}{i}\right)=0$, לכן בודאי עבור כל $\varepsilon>0$, $\lim_{i\to\infty}P\left(\left|\frac{S_i}{i}-E\left(\frac{S_i}{i}\right)\right|>\varepsilon\right)=0$.

ראינו שבשרשרת סופית כל מצב ארגודי הוא נשנה. ראינו שבשרשרת אינסופית לא כל מצב ארגודי הוא נשנה. נתן כאן קריטריון לנשנות שמתאים לכל שרשרת ולא רק לשרשרות סופיות.

<u>משפט</u>

מצב i בשרשרת מרקוב הוא נשנה אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty}P_{i,i}^{(n)}=\infty$.

כיוון אחד אפשר לקבל מהלמה של בורל קנטלי: יהי A_i המאורע שאם מתחילים בשלב 0 במצב i אז נמצאים שוב במצב i לאחר n שלבים. מתקיים $P(A_i)=P_{i,i}^{(n)}$. אם $\sum P(A_i)=\sum P_{i,i}^{(n)}<\infty$ אז בהכרח נקבל מספר סופי של ביקורים במצב i. את הכיוון השני אי אפשר לקבל באופן פשוט מהלמה כי יתכן שהמאורעות תלויים.
נוכיח את הכיוון השני:
נניח שמצב i הוא חולף אז לאחר כל ביקור בו יש הסתברות a , $0\le a<1$ שנחזור אליו באיזשהו שלב אחר-כך. מספר הביקורים במצב מתפלג $G(1-a)$ ולכן הוא בעל תוחלת סופית. אך $\sum P_{i,i}^{(n)}$ זה תוחלת מספר הביקורים לאחר שהתחלנו בו (כסכום אינדיקטורים). לכן תוחלת מספר הביקורים בו היא ∞ וקבלנו סתירה להיותו של i מצב חולף.

<u>משפט</u>

נשנות היא תכונה מחלקתית.
הראנו שאם מצבים מתקשרים הדדית אז ארגודיות של אחד גוררת את הארגודיות של האחר.
נראה שגם נשנות היא תכונה מחלקתית.
נניח שמצבים i ו j מתקשרים ומצב i הוא נשנה. קיים מסלול באורך k מסוים קבוע (מבין רבים) שמוביל ממצב i למצב j וקיים מסלול באורך t מסוים שמוביל ממצב j למצב i. מתקיים $P_{j,j}^{(t+n+k)}\ge P_{j,i}^{(t)}P_{i,i}^{(n)}P_{i,j}^{(k)}$ (במעבר דרך מצב i , אולי יש מעברים נוספים, אבל זה נותן חסם).
הגדלים $P_{j,i}^{(t)}$ ו $P_{i,j}^{(k)}$ הם גדלים קבועים חיובים. לכן

$$\sum_n P_{j,j}^{(t+n+k)}\ge P_{j,i}^{(t)}P_{i,j}^{(k)}\sum_{n=1}^{\infty}P_{i,i}^{(n)}=\infty$$

לכן גם מצב j הוא נשנה.

<u>דוגמא</u>

נתונה שרשרת מרקוב על השלמים שבה בכל שלב הולכים ימינה שלושה צעדים בסיכוי חצי והולכים שמאלה צעד אחד בסיכוי חצי.
האם מצב 8 הוא נשנה ?
<u>תשובה</u>
הוא לא נשנה. הוא חולף.
ראינו שעל-פי החוק החזק מצב 0 הוא חולף. מכיון שנשנות וחולפות הן תכונות מחלקתיות, אז מצב 8 שבאותה מחלקה כמו מצב 0 הוא גם חולף.
יכולנו להגיע למסקנה זו גם משיקולי סימטריה. אם הילוך שמתחיל במצב 0 הוא חולף אז גם הילוך שמתחיל במצב 8 הוא חולף (כאן בגלל הסימטריה בהסתברויות, ההסתברות לחזור למצב 8 מעצמו לאחר מספר מסוים של צעדים שווה להסתברות לחזור למצב 0 מעצמו תוך אותו מספר צעדים).

דוגמא

נתונה שרשרת מרקוב על השלמים האי שליליים. נניח שעבר כל מצב $i \geq 1$ מתקיים $P_{i,0} = 1$ ועבור כל $i \geq 1$ מתקיים $P_{0,i} = f(i) > 0$.

האם המצבים השונים הם נשנים או חולפים ?

תשובה

למצב 0 תמיד חייבים לחזור תוך שני צעדים (כי מכל מצב אחר מייד חוזרים אליו). לכן מצב 0 הוא נשנה. השרשרת היא בלתי פריקה: מכל מצב יש מסלול למצב 0 (אפילו בצעד אחד) וממצב 0 יש מסלול לכל מצב אחר (אפילו בצעד אחד). מכיון שמצב 0 הוא נשנה ומכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים הם נשנים.

מחזוריות

יהי i מצב ארגודי בשרשרת מרקוב.

נסתכל על קבוצת הטבעיים $\{n_k\}$ המקיימים $P_{i,i}^{(n_k)} > 0$ (n_k שיך לקבוצה זו אם ניתן לחזור ממצב i לעצמו לאחר n_k צעדים).

לקבוצה זו של טבעיים יש מחלק משותף מכסימלי.

הגדרה

המחזור d_i של מצב i הוא המחלק המשותף המכסימלי של הטבעיים שבקבוצה זו.

נשים לב שאם $P_{i,i}^{(k)} > 0$ ו $P_{i,i}^{(t)} > 0$ אז גם $P_{i,i}^{(k+t)} > 0$ (את הרעיון של ההסבר לזה כבר ראינו בהוכחה לכך שנשנות היא תכונה מחלקתית).

לכן קבוצת הטבעיים $\{n_k\}$ היא סגורה תחת פעולת חיבור. לקבוצה המקיימת את התכונה הזאת קוראים חבורה למחצה. כל סכום של שני איברים מהקבוצה הוא גם בקבוצה.

טענה

עבור מצב i בעל מחזור d_i, ניתן לחזור אליו מעצמו רק בזמנים שהם כפולות שלמות של d_i.

הסבר

מספר הצעדים בין כל שני ביקורים עוקבים במצב i הוא כפולה של d_i. הזמן עד ביקור מסוים במצב i הוא סכום של זמנים שבין ביקורים עוקבים. לכן, גם הוא מהווה כפולה של d_i.

טענה

עבור מצב i בעל מחזור d_i, קיים N סופי, כך שלכל nd_i (מכפלה של d_i בשלם), כך ש $nd_i > N$, מתקיים $P_{i,i}^{nd_i} > 0$.

הסבר

צריך להראות שקיים N סופי כך שלאחריו עבור כל כפולה של d_i , קיים מסלול ממצב i לעצמו באורך זה. למעשה צריך להראות שעבור כל כפולה כזאת, קיים סכום של טבעיים מהקבוצה $\{n_k\}$ שמסתכם באותה כפולה. זה שקול לכך שקיימת קומבינציה של טבעיים מהקבוצה $\{n_k\}$ עם מקדמים חיובים שמסתכמת בכפולה כזאת.

מכיון שהמחזור של מצב i הוא d_i , אז לפי הנכונות של האלגוריתם של אוקלידס, קיימת קומבינציה של המספרים $\{n_k\}$ שמסתכמת ב d_i. בקומבינציה זו יכולים להופיע גם מקדמים שליליים.

נסתכל גם על קומבינציה של המספרים $\{n_k\}$ שבה כל אחד מהמקדמים שווה לערך המוחלט של המקדם של אותו טבעי בקומבינציה שנותנת את הסכום d_i. קומבינציה זו נותנת איזשהו סכום שלם M.

נסתכל גם על קומבינציה שבה עבור כל טבעי מהקבוצה $\{n_k\}$, המקדם שלו שווה לסכום מקדמיו בקומבינציה שיוצרת את d_i ומקדמו בקומבינציה שיוצרת את הסכום M. קומבינציה זו יוצרת את הסכום $M+d_i$. נשים לב לכך שכל המקדמים שבקומבינציה זו הם אי שליליים. כך ניתן ליצור בעזרת מקדמים אי שליליים בלבד את שני הסכומים M וגם $M+d_i$.
כעת נראה שבאמצעות קומבינציות עם מקדמים אי שליליים של M ו $M+d_i$, ניתן ליצור את כל הכפולות של d_i החל מ M^2 (הערה: אנו לא מחפשים את המקום המינימלי שהחל ממנו ניתן ליצור את כל הכפולות, די לנו להראות שקיים מקום כזה).
על-ידי מכפלה של M פעמים הגודל M, ניתן ליצור את הגודל M^2. כעת ניתן בכל שלב להגדיל את הסכום ב d_i על-ידי החלפת אחד הגורמים שבגודל M בגורם שבגודל $M+d_i$. כך ניתן ליצור את כל הכפולות של d_i שבין M^2 ל $M(M+d_i)$. את הגודל $M(M+d_i)$ ניתן ליצור גם על-ידי סכום של $M+d_i$ גורמי M. כעת שוב ניתן להגדיל בכל שלב את הסכום ב d_i על-ידי החלפת אחד הגורמים שבגודל M בגורם שבגודל $M+d_i$. כך ניתן ליצור את כל הכפולות של d_i שבין $M(M+d_i)$ ל $M(M+2d_i)$. כך ניתן להמשיך וליצור את כל הכפולות של d_i החל מ M^2.

<u>טענה</u>
לכל המצבים שבאותה מחלקה יש את אותו מחזור, זאת אומרת שגם מחזוריות מסוימת היא תכונה מחלקתית.
<u>הסבר</u>
נניח שלמצב i שבמחלקה יש מחזור d_i ולמצב j שבאותה מחלקה יש מחזור d_j.
נראה ש $d_j \le d_i$:
קיים m סופי כך ש $P_{i,i}^{(m)}>0$ וגם $P_{i,i}^{(m+d_i)}>0$. מכיון שהמצבים i ו j הם מקושרים אז קיים t סופי כך ש $P_{j,i}^{(t)}>0$ וקיים k סופי כך ש $P_{i,j}^{(k)}>0$. לכן מתקיים $P_{j,j}^{(t+m+k)} \ge P_{j,i}^{(t)}P_{i,i}^{(m)}P_{i,j}^{(k)}>0$ וגם $P_{j,j}^{(t+m+d_i+k)} \ge P_{j,i}^{(t)}P_{i,i}^{(m+d_i)}P_{i,j}^{(k)}>0$. לכן ניתן לחזור ממצב j לעצמו לאחר $t+k+m$ צעדים וגם לאחר $t+k+m+d_i$. לכן d_j מחלק את ההפרש שבינהם שהוא d_i ולכן $d_j \le d_i$. באופן דומה נקבל גם $d_i \le d_j$ ולכן $d_i = d_j$.

<u>דוגמא</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

למצב הראשון ניתן לחזור בשלושה צעדים וגם בחמישה צעדים, לכן המחזור שלו הוא 1 (מצב לא מחזורי). זאת למרות שלא ניתן לחזור אליו בצעד אחד.

<u>הערה</u> (חשיבותה תתברר בהמשך הקורס)
אם מצב הוא מחזורי אז לא ניתן לצפות שההסתברות הגבולית להיות בו בשלב מסוים תשאף לגבול.
למשל אם מטריצת המעבר של שרשרת בת שני מצבים היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אז בצעדים הזוגיים נהיה במצב בו התחלנו ובצעדים האי זוגיים במצב האחר.

<u>דוגמא</u>

נתונה שרשרת מרקוב על השלמים האי שליליים. עבור כל $i \geq 9$ מתקיים $P_{0,i} = 0.5^{i-8}$ ו $P_{i,i-1} = 1$ עבור $i \geq 1$.
מהו המחזור של מצב 7 ?

<u>תשובה</u>
אם עוברים ממצב 0 ישירות למצב 9, אז חוזרים למצב 0 ב 10 צעדים. אם עוברים ממצב 0 ישירות למצב 10, אז חוזרים למצב 0 ב 11 צעדים. המחזור של מצב 0 צריך להיות לא גדול מהמחלק המשותף המכסימלי של 10 ו 11 שהוא 1. לכן מצב 0 הוא לא מחזורי. מצבים 0 ו 7 הם מקושרים וכך גם מצב 7 הוא לא מחזורי (המחזור שלו הוא 1).

<u>שאלה</u>
מהו המחזור של מצב 8 בהילוך מקרי על הישר ?

<u>תשובה</u>
אם מתחילים בראשית אז כדי להיות בראשית לאחר מספר מסוים של צעדים, צריך שמספר הצעדים ימינה ישווה למספר הצעדים שמאלה. לכן ניתן להיות בראשית רק בשלבים זוגיים. לכן המחזור של הראשית הוא כפולה של 2.
מכיון שניתן לחזור לראשית בשני צעדים, אז המחזור אינו יותר מ 2.
משני הטיעונים האלה נקבל שהמחזור של הראשית הוא בדיוק 2.
מכיון שמצבים 0 ו 8 הם מקושרים, אז גם למצב 8 יש מחזור 2.

<u>הערה</u>
במקרה זה יכולנו גם להראות ישירות שהמחזור של מצב 8 הוא 2. יכולנו לעשות זאת בהסתמך על טיפול בזמנים שבהם ניתן להגיע ממצב 8 לעצמו.

<u>שאלה</u>
יהי i - מצב בשרשרת מרקוב בלתי פריקה.
יהי a - המחלק המשותף המכסימלי של כל המספרים n , המקיימים $P_{i,i}^{(n)} > 0$.
יהי b - המחלק המשותף המכסימלי של כל המספרים n , המקיימים $f_{i,i}^{(n)} > 0$.
<u>א</u>. תנו נימוק מילולי קצר לכך שתמיד $b \geq a$. (<u>רמז</u>: קבוצה אחת מכילה את האחרת)
<u>ב</u>. הראו שאם מתחילים במצב i אז ניתן לבקר בו רק לאחר מספר צעדים שהוא כפולה שלמה של b.
<u>ג</u>. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $a = 1$ אז גם $b = 1$.
<u>ד</u>. הסיקו שניתן לאפיין אי מחזוריות בשני אופנים.
<u>ה</u>. הראו גם ש $b = a$.

<u>תשובה</u>
<u>א</u>. קבוצת המספרים $\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\}$ מוכלת בקבוצת המספרים $\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\}$
(אם ניתן להגיע לראשונה לאחר מספר צעדים מסוים אז כמובן ניתן גם להגיע לאחר מספר צעדים זה, כי הגעה ראשונה היא מקרה פרטי של הגעה). כל מחלק משותף של הקבוצה $\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\}$ הוא גם מחלק משותף של קבוצה מצומצמת יותר של מספרים. לכן המחלק המשותף המכסימלי של הקבוצה $\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\}$ הוא גם מחלק משותף של הקבוצה $\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\}$. המחלק המשותף המכסימלי בקבוצה $\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\}$ שווה לפחות לו (מכיון שהוא אחד המחלקים המשותפים).
<u>ב</u>. בין כל שני ביקורים עוקבים במצב עובר זמן שהוא כפולה שלמה של b (כל ביקור הוא הראשון אחרי הביקור הקודם). לכן הזמן עד כל ביקור הוא כפולה שלמה של b.
<u>ג</u>. אם המחזור הוא 1 אז קיים n , כך שניתן לבקר במצב לאחר n שלבים וגם לאחר $n+1$ שלבים.

לפי הסעיף הקודם n וגם $n+1$ הם כפולה שלמה של b, לכן $b=1$.

ד. הראנו שתמיד $b \geq a$ וגם הראנו שאם $a=1$ אז גם $b=1$. לכן התנאים ש $a=1$ וש $b=1$ הם שקולים. לכן שניהם מאפינים של אי מחזוריות.

ה. הנימוק דומה לנימוק של סעיף ג'. קיים n כך ש $P_{i,i}^{(n)} > 0$ וגם $P_{i,i}^{(n+a)} > 0$. בין כל ביקור עד לביקור הבא במצב i יש חזרה ראשונה למצב. לכן n הוא כפולה של b וגם $n+a$ הוא כפולה של b. לכן ההפרש ביניהם הוא גם כפולה של b. לכן a הוא כפולה של b. לכן נקבל ש $b \geq a$. ביחד עם התוצאה של סעיף א' נקבל ש $a=b$.

נראה שימוש פשוט ביותר במסקנה מהשאלה הזאת.

שאלה

נתונה שרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מהו המחזור של מצבי השרשרת ?

תשובה

ניתן לחזור לראשונה למצב רק בבדיוק 3 צעדים. לכן המחזור של כל מצב הוא 3.

שאלה

נתונות שתי מטריצות מעבר P,Q של שרשרות מרקוב בלתי פריקות ולא מחזוריות בעלות אותו מספר מצבים.

האם גם המטריצה $\frac{1}{2}(P+Q)$ היא מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב בלתי פריקה ולא מחזורית ?

תשובה

היא בהכרח בלתי פריקה ולא מחזורית.

נסתכל על אחת מהשרשרות המקוריות. היא בלתי פריקה כי ניתן יש מסלול מכל מצב לכל מצב. היא לא מחזורית וזה אומר שלגבי כל מצב, המחלק המשותף המכסימלי של אורכי המסלולים שבהם ניתן לחזור למצב מעצמו, הוא 1. בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא $\frac{1}{2}(P+Q)$, כל איבר i,j הוא חיובי, אם האיבר ה i,j הוא חיובי באחת המטריצות המקוריות. לכן בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא $\frac{1}{2}(P+Q)$ לגבי כל מצב, כל המסלולים שהיו אפשריים ממנו ואליו בשרשרות המקוריות, הן אפשריות גם בה.

סוגיה שקשורה לנושא של מרקוביות.

בחצר יש בן אחד ששמו נחום ושתי בנות ששמותיהן ליאת ושירי. ברשותם יש גם כדור בודד. בכל שלב שהכדור נמצא בידי נחום, הוא מחזיק את הכדור אצלו גם בשלב הבא בסיכוי חצי ומעביר אותו לידי כל אחת מהבנות בסיכוי רבע. בכל שלב שהכדור נמצא בידי ליאת היא מעבירה אותו לידי נחום בסיכוי 0.8 , משאירה אותו אצלה בסיכוי 0.1 ומעבירה אותו לשירי בסיכוי 0.1 . בכל שלב שבו הכדור נמצא בידי שירי היא מעבירה אותו לידי נחום בסיכוי 0.2 , משאירה אותו אצלה בסיכוי 0.4 ומעבירה אותו לליאת בסיכוי 0.4 . נניח שבתחילה הכדור נמצא בידי נחום.

נסתכל על תהליך בעל שני מצבים. 1- הכדור נמצא בידי בן, 2- הכדור נמצא בידי אחת הבנות.

נשים לב שממצב 1 עוברים למצב 1 בסיכוי 0.5 . כמו כן נשים לב שאם הכדור נמצא בידי כל אחד מהשלושה, אז בשלב הבא הוא יהיה בידי ליאת בסיכוי שווה לסיכוי שהוא יהיה בידי שירי. לכן, גם ממצב 2 עוברים למצב 1 בסיכוי $0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.5$. לכן לתהליך יש מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

אך נשים לב שאילו את מצב 2, היינו מפרקים לשני תתי מצבים של כדור אצל ליאת וכדור אצל שירי, אז הסתברויות המעברים למצב של "הכדור אצל בן", היו משתנות בין שני תתי המצבים. אך ראינו שהתהליך המקורי הוא מרקובי.
מסוגיה זו נוכל ללמוד שאין לשלול מרקוביות בגלל תלות בתהליך אחר.

<u>שאלה נוספת על החוק החלש ועל החוק החזק</u>

יהיו $X_1, X_2, \cdots$ סדרת משתנים בלתי תלויים שלגביהם מתקיים :

אם $i = k^k$ עבור איזשהו k טבעי אז :

$$P[X_i = 0] = 1 - \frac{1}{k} \quad , \quad P[X_i = i] = P\ [X_i = -i] = \frac{1}{2k}$$

ועבור i שלא מקיים את הדרישה הזאת $P[X_i = 0] = 1$.

<u>א</u>. הראה שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה .

<u>ב</u>. הראה שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה .

<u>פתרון</u>

<u>א</u>. מכיוון ש $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ והמשתנים X_i בלתי תלויים אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 אינסוף פעמים יתקבל $\left| X_{k^k} \right| = k^k$ כך שאינסוף פעמים יתקבל $\left| \frac{S_{k^k}}{k^k} - \frac{S_{k^k - 1}}{k^k - 1} \right| > 0.5$, לכן סדרת הממוצעים תצא מסביבה ברדיוס 0.25 של הראשית אינסוף פעמים ואין התכנסות של סדרת הממוצעים .

<u>ב</u>. נסתכל על נקודת זמן i : $k^k \le i < (k+1)^{k+1}$. בנקודה כזאת המשתנה האחרון לפניה שיכול היה לקבל ערך שונה מאפס הוא X_{k^k} . מתקיים עבור כל $\varepsilon > 0$ $P\left(\left| \frac{X_{k^k}}{i} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{1}{k}$ לכן :

$$\lim_{k \to \infty} P\left(\left| \frac{X_{k^k}}{i} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0 \quad (1) \ .$$

מתקיים $\sum_{n<k} n^n < k^{k-1}$ לכן $\lim_{k \to \infty} \frac{\sum_{n<k} \left| X_{n^n} \right|}{i} = 0$ (2) .

מ (1) ומ (2) נקבל $\lim_{k \to \infty} P\left(\left| \frac{\sum_{n=1}^{k} X_{n^n}}{i} \right| > \varepsilon \right) = 0$ לכל $\varepsilon > 0$.

<u>הערה</u>: די היה אם במקום (2) היינו מראים ש $\lim_{k \to \infty} P\left(\left| \frac{\sum_{n<k} X_{n^n}}{i} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0$ לכל $\varepsilon > 0$, אך הראנו יותר מזה .