<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ המשך נשנות</u>

שלומי

<u>הילוכים מקריים</u>

<u>דוגמא</u> (הילוך מקרי על הישר)
הילוך מקרי על הישר שבו בכל שלב הולכים ימינה בסיכוי p ושמאלה בסיכוי $q=1-p$.
ניתן לחזור ממצב לעצמו רק לאחר מספר זוגי של צעדים, לאחר כל מספר זוגי של צעדים ניתן לחזור מהמצב לעצמו. לכן המחזור של כל מצב הוא 2.
מכיון שראינו שנשנות היא תכונה מחלקתית אז, כדי לראות אם המצבים הם נשנים, די לבדוק אם מצב 0 הוא נשנה.

עבור כל n מתקיים $P_{0,0}^{(2n+1)}=0$. לכן צריך לבדוק אם $\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,0}^{(2n)} \overset{?}{=} \infty$.

מתקיים $P_{0,0}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^n q^n=\frac{(2n)!}{n!n!}p^n q^n$. נשתמש בנוסחת סטרלינג כדי לקרב את הביטויים

האלה: $n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $(2n)!\sim\sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$.

לכן $P_{0,0}^{(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}4^n(pq)^n$.

עבור $p\neq 0.5$ מתקיים $pq<\frac{1}{4}$ והטור $\sum\frac{1}{\sqrt{\pi n}}4^n(pq)^n$ מתכנס ומצבי השרשרת הבלתי פריקה הם חולפים.

עבור $p=0.5$ הטור מתנהג כמו $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$. הוא מתבדר ולכן מצב 0 ואיתו כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

<u>הערה</u>: אפשר לראות גם לפי החוק החזק של המספרים הגדולים שעבור $p\neq q$ מצב 0 הוא חולף.
יש התכנסות של סדרת הממוצעים המצטברים של המהלכים לגודל $q\cdot(-1)+p\cdot 1\neq 0$ ולכן רק מספר סופי של פעמים נבקר במצב 0.
ברמה האינטואיטיבית, יש סחף לאחד הכיוונים. אם $p>0.5$ אז יש סחף לימין ואם $p<0.5$ יש סחף לשמאל.

נראה גם בדרך נוספת שהשרשרת היא נשנית כאשר $p=0.5$:
לאחר $2n$ צעדים ניתן להגיע ממצב 0 למצבים הזוגיים שהם בין $-2n$ ל $+2n$. סך הכל יש $2n+1$ אפשרויות שונות (בין 0 ל $2n$ צעדים ימינה).

ההסתברות להגיע למצב $2t$ היא $\binom{2n}{n+t}0.5^{2n}$. הביטוי $\binom{2n}{n+t}$ מקבל ערך מכסימלי עבור $t=0$.

זהו השכיח מבין $2n+1$ אפשרויות, לכן יש לו הסתברות של לפחות $\frac{1}{2n+1}$. מתקיים

$\sum\frac{1}{2n+1}=\infty$. לכן מצב 0 הוא מצב נשנה.

<u>שאלה</u>
היכן נכשל נסיון בדרך זו להראות שעבור $p\neq 0.5$ מצב 0 הוא נשנה ? (נסיון שלא יכול להצליח כי כאשר $p\neq 0.5$, מצב 0 הוא חולף).

תשובה

בכל שלב מקבלים מצב שכיח אחר ואי אפשר לטעון שיש מצב שעבור כל $2n$, יש לו הסתברות של לפחות $\frac{1}{2n+1}$.

נחזור להילוך הסימטרי:

נסתכל על a - ההסתברות לחזור אי פעם למצב 0 אם מתחילים בו. זאת למעשה ההסתברות לחזור למצב 0 ממצב $+1$ או מצב -1 (כאן שנהם שווים).

ממצב $+1$ חוזרים למצב 0 ישירות בהסתברות 0.5 ואחרת מגיעים למצב $+2$. כדי לחזור ממצב $+2$ למצב 0, צריך קודם לחזור למצב $+1$ ולכך יש גם הסתברות a. לכן ההסתברות לחזור אי פעם ממצב 2 למצב 0 היא a^2 . לכן מתקיים $a = 0.5 + 0.5a^2$. למשוואה זו אין פתרון $0 \le a < 1$. ההסתברות לחזור למצב 0 היא 1 שזה כן פתרון. מצב 0 הוא נשנה.

שאלה

מהי ההסתברות שבהילוך מקרי לא סימטרי נחזור אי פעם לראשית ?

תשובה

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $p > q$.

לפי החוק החזק של המספרים הגדולים, לכל היותר במספר סופי של פעמים יהיה מספר הצעדים המצטבר שמאלה גדול ממספר הצעדים המצטבר ימינה. לכן החל מאיזשהו צעד, נהיה תמיד ימינה לראשית. לכן אם נעשה צעד ראשון שמאלה אז בהכרח נחלוף על הראשית באיזשהו שלב. אם נעשה צעד ראשון ימינה אז הסיכוי a לחזור לראשית מקיים את המשוואה: $a = q + pa^2$. למשוואה זאת יש פתרון בקטע $0 < a < 1$ והוא $a = \frac{q}{p}$. לכן הסיכוי לחזור אי פעם לראשית הוא $q \cdot 1 + p\frac{q}{p} = 2q$ והסיכוי לא לחזור אף פעם הוא $1 - 2q = p - q$.

דוגמא

תהי $X_1, X_2, X_3, \cdots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 0.5$ לכל $i \ge 1$. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. נסתכל על הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים $X_1, X_2, X_3, \cdots$.

<u>א</u>. הראו שעבור כל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$, קיים n טבעי כך שרציונלי זה יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$.

<u>ב</u>. *הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$ אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$, יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.*

<u>ג</u>. הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ 0.5 לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

<u>ד</u>. הראו שהרציונלי 0.5 יתקבל כמנה אינסוף פעמים בהסתברות 1 .

<u>ה</u>. הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ היתה שרשרת מרקוב.

<u>ו</u>. הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

פתרון:

א. הרציונלי $\frac{p}{q}$ יכול להתקבל לאחר q נסיונות שמתוכם ב p נסיונות יהיו הצלחות.

ב. נניח שלאחר q_1 נסיונות, הערך 1 התקבל p_1 פעמים. נראה שקיים n כך שבהסתברות חיובית, לאחר $q_2 \cdot 10^n$ נסיונות תתקבל המנה $\frac{p_2}{q_2}$. n יהיה תלוי ב q_1, p_1, q_2, p_2 :

נבחר n כך ש $q_2 \cdot 10^n \geq q_1$ וגם $p_2 \cdot 10^n \geq p_1$ וגם $q_2 \cdot 10^n - p_2 \cdot 10^n \geq q_1 - p_1$.

המנה $\frac{p_2}{q_2}$ יכולה להתקבל לאחר שמתוך $q_2 \cdot 10^n - q_1$ הנסיונות שיבואו לאחר q_1 הנסיונות הראשונים, יתקבל הערך 1 ב $p_2 \cdot 10^n - p_1$ פעמים.

ג. על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים, סדרת המנות $\frac{S_n}{n}$ שואפת ל 0.5 (0.5 זה כאן התוחלת של כל אחד מהמשתנים הבלתי תלויים וחסומים). עבור כל $\varepsilon > 0$, מספר הפעמים שתתקבל מנה המרוחקת מ 0.5 בלפחות ε הוא סופי. כל רציונלי $\frac{p}{q}$ ששונה מ 0.5 מרוחק מ 0.5 ב $\varepsilon = \left| 0.5 - \frac{p}{q} \right|$.

ד. הוכחנו שהילוך המקרי הסימטרי על הישר הוא נשנה, זאת אומרת שבהילוך זה בהסתברות 1 , אינסוף פעמים יהיו מספר הצעדים המצטברים ימינה שווה למספר הצעדים המצטברים שמאלה. לכן בסדרה שלנו כאן, בהסתברות 1 , אינסוף פעמים תהיה הפרופורציה המצטברת של התוצאות 1 מתוך כלל הנסיונות שווה בדיוק ל 0.5 .

הערה

העובדה שהממוצע שואף לחצי, לא מוכיחה שהוא שווה לחצי אין סוף פעמים.

ה. לגבי שרשרת מרקוב הראנו בהרצאה, שנשנות היא תכונה מחלקתית, זאת אומרת שאם שני מצבים מקושרים אז אם אחד מהם הוא נשנה אז גם האחר הוא נשנה. כאן הראנו שיש השתלשלות שמובילה מכל מנה רציונלית בקטע הפתוח $(0,1)$ לכל מנה רציונלית בקטע זה. אך גם הראנו שהמנה 0.5 מתקבלת אינסוף פעמים בזמן שכל מנה אחרת לא מתקבלת אינסוף פעמים.

ו. $$P\left(\frac{S_3}{3} = \frac{2}{3} \mid \frac{S_2}{2} = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \quad , \quad P\left(\frac{S_5}{5} = \frac{2}{3} \mid \frac{S_4}{4} = \frac{1}{2}\right) = 0$$

(מדובר בהסתברויות מותנות).

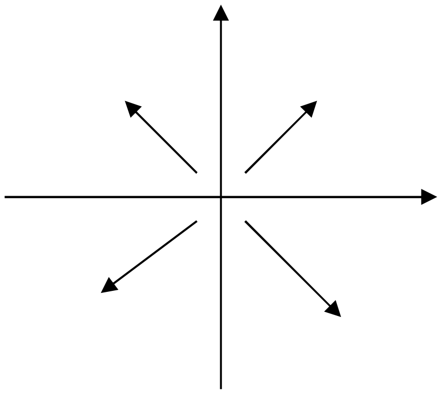
מכאן הסתברות המעבר תלויה בזמן ולא רק במצב: (אין הומוגניות בזמן).

הילוך מקרי סימטרי על שריג דו-מימדי

זהו הילוך שבו בכל שלב הולכים ימינה, שמאלה, למעלה או למטה כל אחד בסיכוי $\frac{1}{4}$.

כדי להיות לאחר מספר צעדים מסוים בנקודה ההתחלתית צריך שמספר הצעדים ימינה ישווה למספר הצעדים שמאלה ומספר הצעדים למעלה ישווה למספר הצעדים למטה. האינטואיציה אומרת שלכן בהילוך המקרי ה- d מימדי, ההסתברות להיות במקור לאחר מספר זוגי של צעדים מתנהגת כמו $\frac{1}{n^{0..5d}}$ וכך למשל בהילוך המקרי הדו-מימדי היא מתנהגת כמו $\frac{1}{n}$ ומכיון ש $\sum \frac{1}{n} = \infty$ אז גם ההילוך הזה הוא נשנה. אבל זה לא כה פשוט, כי מספר המהלכים בציר מסוים תלוי במספר המהלכים בציר האחר.

זה היה יותר פשוט אילו היינו מדברים על הילוך מסוג אחר שבו בכל שלב בוחרים סימולטנית כיוון בכל מימד. כאן בהילוך האחר יש אי תלות בין הקורה במימדים השונים.



אבל בהילוך שלנו, אנו לא בוחרים בכל שלב כיוון בכל מימד. אנו עושים צעד רק באחד המימדים.
נמחיש כאן שיש תלות בין המאורעות של חזרה לראשית בשני המימדים.
יהי A - המאורע שלאחר שני מהלכים נהיה בנקודה 0 בציר ימין-שמאל.
יהי B - המאורע שלאחר שני מהלכים נהיה בנקודה 0 בציר למעלה-למטה.
$A \cap B$ זה המאורע שלאחר שני מהלכים נהיה בראשית.
כדי לחזור לראשית לאחר שני צעדים, הצעד השני צריך להיות צעד מנוגד לצעד הראשון,
לכן $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

$$P(A) = P(B) = 0.5^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.25 = \frac{3}{8}$$

(או ששני הצעדים הם בציר האחר או ששני הצעדים הם בציר המדובר, אבל בכיוונים מנוגדים).
נקבל ש $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ ולכן יש תלות בין הקורה בצירים השונים.

נציע שתי גישות כדי להתגבר על הבעיה.

הגישה הראשונה אינה אלגברית.
נשים לב שבהילוך האחר, כדי להיות בראשית בשלב מסוים, חייבים שמספר צעדי הימין ולמעלה יהיה שווה למספר צעדי השמאל ולמטה וגם מספר צעדי שמאל ולמעלה יהיה שווה למספר צעדי הימין ולמטה. גם בהילוך הזה (האחר) יש בכל שלב 4 מהלכים אפשריים וכדי לחזור לראשית, צריך שיוויון במספר הצעדים בשני זוגות. לכן סיכויי החזרה לראשית הם זהים בשני המימדים (האחד הוא סיבוב של האחר).
אבל, אנו יודעים שבהילוך הזה (האחר) הסיכוי להיות בראשית לאחר מספר זוגי של n צעדים הוא בסדר גודל של $n^{-0.5}n^{-0.5} = \frac{1}{n}$ (יש אי תלות בין הקורה במימד ימין שמאל לבין הקורה במימד למטה למעלה). לכן מכיוון ש $\sum \frac{1}{n} = \infty$, אז שני התהליכים הם נשנים.

הגישה השניה היא אלגברית.
שוב ניתן לחזור למקור רק לאחר מספר זוגי של צעדים. כדי לחזור למקור צריך מספר הצעדים ימינה להיות שווה למספר הצעדים שמאלה ומספר הצעדים למעלה צריך להיות שווה למספר הצעדים למטה.

$$P_{(0,0),(0,0)}^{(2n)} = \sum_{0\le k\le n} \frac{(2n)!}{k!\cdot k!\cdot (n-k)!(n-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\sum \binom{n}{k}\binom{n}{k} =$$

$$= \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\sum \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

לפי נוסחת סטרלינג מתקיים:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} \cong \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4n\pi}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2n\pi}} = \frac{4^{n}}{\sqrt{\pi n}}$$

לכן $P_{0,0}^{(2n)}$ מתנהג אסימטוטית כמו $\frac{1}{n}$. ומכיון ש $\sum \frac{1}{n} = \infty$ אז מצב 0 ואיתו כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

כאן ננסה להמחיש מדוע ההילוך המקרי התלת מימדי הוא חולף (זאת רק המחשה שלא מובאת כאן כהוכחה).

כדי לחזור למקור לאחר $2n$ צעדים צריכים מספר מספר שווה של צעדים בכל ציר לכל אחד משני הכיוונים. ראינו שאם הולכים במימד מסוים סדר גודל של n צעדים, אז ההסתברות שמתוכם יהיה מספר שווה של צעדים בשני הכיוונים מתנהגת כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$. אבל לפי החוק החזק של המספרים הגדולים, רק מספר סופי של פעמים מספר הצעדים במימד מסוים יהיה קטן מלמשל פרופורציה של $\frac{1}{8}$ מהמהלכים.

בכל הפעמים שבהם לא תהיה סטייה גדולה זו, ההסתברות שמספר הצעדים בשני הכיוונים יקזזו זה את זה מתנהגת כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$. מכיון שבהינתן שהלכנו מספר פעמים מסוים בכל מימד, אז אין תלות בין מה שקורה במימדים שונים, אז ההסתברות לחזור לראשית לא תהיה יותר מסדר גודל של $\left(\frac{1}{n}\right)^{1.5}$. מכיון ש $\sum\left(\frac{1}{n}\right)^{1.5} < \infty$ אז רק מספר סופי של פעמים נבקר בראשית. בנוסף רק מספר סופי של פעמים יהיה מספר הצעדים במימד מסוים קטן מפרופורציה של $\frac{1}{8}$. מספר סופי של פעמים לא מענין אותנו.

זה היה לגבי הדיון הלא פורמלי.

<u>שאלה</u>

האם קיימת שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלתי פריקה שבה קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} X_n$.

<u>תשובה</u>

בשרשרת אינסופית זה יתכן. נסתכל על הילוך מקרי לא סימטרי על קבוצת המצבים שהם החזקות של 2 2^k עבור $-\infty < k < +\infty$. נניח שממצב 2^k עוברים בסיכוי $\frac{2}{3}$ למצב 2^{k-1} ובסיכוי $\frac{1}{3}$ עוברים למצב 2^{k+1}. זאת שרשרת בלתי פריקה חולפת בה יש כמו בהילוך המקרי הלא סימטרי בריחה לכיוון החזקות השליליות של 2. כך יש שאיפה ל 0.

<u>שאלה</u>

האם זה יכול לקרות בשרשרת סופית בלתי פריקה.

<u>תשובה</u>
זה לא יכול לקרות בשרשרת סופית בלתי פריקה בת יותר ממצב אחד.
במחלקה בלתי פריקה בת מספר סופי של מצבים כל המצבים הם נשנים. בין כל מספר סופי של מספרים יש אוסף סופי של מרחקים. נבקר אינסוף פעמים בלפחות שני מצבים שהמרחק בינהם הוא מספר סופי קבוע. לכן אין גבול ל X_n. למי שמכיר: תנאי קושי לא מתקיים.