מבוא לתהליכים סטוכסטיים
גבולות ונשנות חיובית
שלומי

משוואת ההתחדשות

אם מתחילים במצב וחוזרים אליו אז החזרה הראשונה אליו התרחשה עד שלב n לכל המאוחר. אחרי שהגענו אליו לראשונה שוב, יש מעבר ממנו אל עצמו. מגיעים למצב לראשונה כמובן לא יותר מפעם אחת. מהסתברות שלמה נקבל $P_{i,i}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{i,i}^{(k)} P_{i,i}^{(n-k)}$ בנוסף $P_{i,i}^{(0)} = 1$.

ניתן להכליל את המשוואה עבור $i \neq j$: $P_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)}$ ו $P_{i,j}^{(0)} = 0$.

טענה

הראנו שלגבי מצב חולף מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{j,j}^{(n)} < \infty$. נראה שעבור מצב j חולף ועבור כל מצב i מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,j}^{(n)} < \infty$.

הסבר

או שלא מגיעים למצב זאת אומרת שאין בכלל ביקורים בו, או שמגיעים אליו, אבל אז תוחלת מספר הביקורים לאחר הביקור הראשון הוא גם סופי כי הרי המצב הוא חולף.

הוכחה אחרת

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,j}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)} \overset{I}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} P_{j,j}^{(n-k)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} P_{j,j}^{(n)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}^{(k)}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_{j,j}^{(n)}\right) < \infty$$

I. בטור של איברים אי שליליים, אפשר לשנות סדר סכימה.

טענה

עבור מצב חולף j מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0$.

(הראנו שעבור מצב חולף $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,j}^{(n)} < \infty$ ואם הטור מתכנס אז האיבר הכללי שואף לאפס).

נשתמש במסקנה זו כדי לקבל את הטענה הבאה שכבר הראנו בדרך אחרת.

טענה

בשרשרת סופית קיים לפחות מצב נשנה אחד.

הוכחה

נסתכל על מצב קבוע 1. מתקיים עבור כל n קבוע $\sum_{j} P_{1,j}^{(n)} = 1$. (בכל שלב נמצאים באיזשהו מצב וסכום ההסתברויות להיות במצבים השונים בשלב מסוים הוא 1).נניח בשלילה שכל המצבים הם חולפים. במקרה זה עבור כל מצב j קיים N_j כך שעבור כל $n > N_j$ מתקיים $P_{1,j}^{(n)} < \frac{1}{M}$, כאשר

M הוא מספר מצבי השרשרת. נבחר $N=\max_j \{N_j\}$. עבור כל $n>N$ מתקיים $P_{1,j}^{(n)}<\frac{1}{M}$ עבור כל מצב j. לכן מתקיים $\sum_j P_{1,j}^{(n)}<M\frac{1}{M}=1$ וקבלנו סתירה לכך שסכום ההסתברויות בזמן קבוע הוא 1.
לכן בשרשרת סופית קיים לפחות מצב נשנה אחד.

<u>הערה</u>
אם יש מספר סופי של מצבים אז לא יתכן שמעתה ועד עולם נבקר בכל אחד מהם רק מספר סופי של פעמים. לכן לפחות במצב אחד נבקר אינסוף פעמים. מצב שבו נבקר אינסוף פעמים הוא מצב נשנה.

<u>טענה</u>
במחלקה בלתי פריקה בעלת מספר סופי של מצבים, כל המצבים הם נשנים.

<u>הוכחה</u>
הראנו שיש לפחות מצב נשנה אחד. מכיוון שנשנות היא תכונה מחלקתית אז אם במחלקה בלתי פריקה יש מצב נשנה אחד, אז כל המצבים הם נשנים.

<u>נשנות חיובית ונשנות אפס</u>
הגדרנו מצב נשנה חיובי כמצב שתוחלת זמן החזרה אליו היא סופית ומצב נשנה אפס כמצב נשנה שתוחלת זמן החזרה אליו היא אינסופית.

הצגנו <u>קריטריון לנשנות אפס</u>.
הקריטריון: מצב i הוא נשנה אפס אם הוא נשנה וקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)}=0$.

נתן <u>דוגמא</u> למצב נשנה אפס.
שרשרת בעלת מרחב המצבים שהם השלמים האי-שליליים. נניח שמתקיים $P_{0,i}=\frac{1}{i(i+1)}$ עבור כל $i\geq 1$ ו $P_{i,i-1}=1$ עבור כל $i\geq 1$.
אם ממצב 0 מגיעים למצב i, אז עושים צעד אחד למצב i ו i צעדים למצב 0 ובסך הכל $i+1$ צעדים עד חזרה למצב 0. לכן תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}(i+1)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$.

בהוכחת המשפט שממנו בין היתר נובע הקריטריון, יש שימוש בזהות $P(A_n)=\sum_{k=1}^{n} P_{i,i}^{(n-k)} r_k$ כאשר A_n הוא המאורע שאם יצאנו ממצב i, נבקר בו באיזשהו שלב החל מהשלב ה-n (אולי גם באיזשהו שלב לפני כן) כאשר $r_k=\sum_{t=k}^{\infty} f_{i,i}^{(t)}$.
<u>הסבר</u>
עוברים על פני כל המקרים של ביקור במצב i בשלב ה- $n-k$ ושאז זמן החזרה למצב i אחר-כך הוא לפחות k (אבל כן חוזרים אחר-כך). אם היה ביקור נוסף לפני השלב ה-n אז הוא נסכם במקרה אחר. כך יש חלוקה לפי מקרים של הביקור האחרון עד שלב ה- n כאשר $n-k$ מקבל ערכים עד $n-1$.

מכיון שבמצב נשנה מבקרים אינסוף פעמים אז עבור מצב נשנה i מתקיים $\sum_{k=1}^{n} P_{i,i}{}^{(n-k)} r_k = 1$ עבור כל n .

עכשיו ננסח את המשפט שממנו נובע הקריטריון וגם יותר מזה.

<u>משפט</u>

בשרשרת מרקוב מתקיים לגבי מצב נשנה ולא מחזורי i שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}{}^{(n)} = \pi_i$ כאשר $\pi_i = \frac{1}{E_i}$ כאשר E_i היא תוחלת זמן החזרה ממצב i לעצמו.

תחילה נתן שתי <u>טענות עזר</u> שדומות אחת לשניה:

<u>טענות עזר</u>:

אם λ הוא הגבול העליון של $P_{i,i}{}^{(n)}$ ואם m_n היא סדרה עולה של טבעיים כך ש $\lim P_{i,i}{}^{(m_n)} = \lambda$ ויהי l טבעי המקיים $f_{i,i}{}^{(l)} > 0$ אז גם $\lim P_{i,i}{}^{(m_n-l)} = \lambda$.

ובאופן דומה

אם μ הוא הגבול התחתון של $P_{i,i}{}^{(n)}$ ואם m_n היא סדרה עולה של טבעיים כך ש $\lim P_{i,i}{}^{(m_n)} = \mu$ ויהי l טבעי המקיים $f_{i,i}{}^{(l)} > 0$ אז גם $\lim P_{i,i}{}^{(m_n-l)} = \mu$.

ההוכחות לשתי הטענות הן דומות. נוכיח את הטענה הראשונה לגבי הגבול העליון.

<u>הוכחה</u>

נשתמש במשוואת ההתחדשות.

$$P_{i,i}{}^{(m_n)} = \sum_{k=1}^{m_n} f_{i,i}{}^{(k)} P_{i,i}{}^{(m_n-k)} = \left(\sum_{k=1,k\neq l}^{t} f_{i,i}{}^{(k)} P_{i,i}{}^{(m_n-k)} \right) + f_{i,i}{}^{(l)} P_{i,i}{}^{(m_n-l)} + \left(\sum_{k=t+1}^{m_n} f_{i,i}{}^{(k)} P_{i,i}{}^{(m_n-k)} \right)$$

פרקנו את הסכום במשוואת ההתחדשות לשלושה חלקים, כאשר דאגנו ש m_n ו t יהיו מספיק גדולים כך שיתקיימו כמה דברים:

1. $P_{i,i}{}^{(m_n)} > \lambda - \varepsilon$ (מכיון שמדובר בגבול העליון אז עבור $\varepsilon > 0$ החל ממקום מסוים בתת הסדרה מתקיים תמיד ש $P_{i,i}{}^{(m_n)} > \lambda - \varepsilon$).
2. $P_{i,i}{}^{(n)} < \lambda + \varepsilon$ עבור כל $n > t$ (הרי λ הוא הגבול העליון ולכן עבור $\varepsilon > 0$ נתון רק עבור מספר סופי של ערכי n מתקיים $P_{i,i}{}^{(n)} \geq \lambda + \varepsilon$). נבחר $m_n > 2t$ כך שעבור $k \leq t$ יתקיים $m_n - k > t$.
3. $\sum_{n=t+1}^{\infty} f_{i,i}{}^{(n)} < \varepsilon$ וכמו-כן $t > l$ (הטור מסתכם בכלל היותר 1 ולכן יש לו זנב קטן כרצוננו).

לכן נקבל

$$\lambda - \varepsilon < P_{i,i}{}^{(m_n)} \leq \left(\sum_{k=1,k\neq l}^{t} f_{i,i}{}^{(k)} (\lambda + \varepsilon) \right) + f_{i,i}{}^{(l)} P_{i,i}{}^{(m_n-l)} + \sum_{k=t+1}^{m_n} f_{i,i}{}^{(k)}$$

או

$$\lambda - \varepsilon < \left(\sum_{k=1,k\neq l}^{t} f_{i,i}{}^{(k)} (\lambda + \varepsilon) \right) + f_{i,i}{}^{(l)} P_{i,i}{}^{(m_n-l)} + \varepsilon$$

או

$$\lambda - 2\varepsilon < \left(\sum_{k=1, k\neq l}^{t} f_{i,i}{}^{(k)} (\lambda + \varepsilon) \right) + f_{i,i}{}^{(l)} P_{i,i}{}^{(m_n - l)}$$
$$\lambda - 2\varepsilon < \left(1 - f_{i,i}{}^{(l)}\right)\left(\lambda + \varepsilon\right) + f_{i,i}{}^{(l)} P_{i,i}{}^{(m_n - l)}$$

נשים לב שבאגף ימין יש שקלול של ערכים לפי משקולות $f_{i,i}{}^{(k)}$ שמסתכמות בלכל היותר 1 ($\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,i}{}^{(k)} = 1 \geq \sum_{k=1}^{t} f_{i,i}{}^{(k)}$). החלק שמחוץ ל $\sum$ לא יכול להיות קטן מידי כי אחרת השקלול לא יהיה גדול מ $\lambda - 2\varepsilon$. לכן נוכל לקבל (גם על-ידי חישוב) ש $P_{i,i}{}^{(m_n - l)} > \lambda + \varepsilon - \frac{3\varepsilon}{f_{i,i}{}^{(l)}}$.

מכיון ש $f_{i,i}{}^{(l)}$ הוא קבוע אז נקבל שמתקיים $\lim P_{i,i}{}^{(m_n - l)} = \lambda$.

כאמור, ההוכחה עבור הגבול התחתון היא דומה.

כעת ניגש ל<u>הוכחת המשפט</u>

נסתכל על מצב i נשנה לא מחזורי, תהי m_n סידרה של טבעיים כך ש $\lim P_{i,i}{}^{(m_n)} = \lambda = \overline{\lim} P_{i,i}{}^{(n)}$.

מכיון שהמחזור של מצב i הוא 1 אז קבוצת הטבעיים $\{l \mid f_{i,i}{}^{(l)} > 0\}$ היא קבוצה בעל מחלק משותף מכסימלי של 1 והיא יוצרת חבורה למחצה כך שקיים l_0 כך שעבור כל $l > l_0$ כל טבעי שייך לחבורה למחצה. לכן עבור כל $k \geq 0$ מתקיים $\lim P_{i,i}{}^{(m_n - l_0 - k)} = \lambda$.

<u>הסבר</u>

אם מתקיים שעבור l_1 בסדרת הנקודות $m_n - l_1$ יש התכנסות לגבול העליון עבור כל תת סדרה $\{m_n\}$ שבה יש התכנסות לגבול העליון וגם בסדרת הנקודות $m_n - l_2$ יש התכנסות לגבול העליון עבור כל תת סדרה $\{m_n\}$ שבה יש התכנסות לגבול העליון אז גם בסדרת הנקודות $m_n - l_1 - l_2$ יש התכנסות לגבול העליון וכך בגלל שהמחלק המשותף המכסימלי הוא 1 אז החל ממקום מסוים l_0 , עבור כל טבעי $l > l_0$ מתקיים $\lim P_{i,i}{}^{(m_n - l)} = \lambda$.

<u>הערה</u>

זה עדיין לא מוכיח את הטענה ש $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}{}^{(n)} = \lambda$ כי דרוש לנו להציג את n כהפרש של איברי m_n ואיברים בחבורה למחצה שערכם שואף לאינסוף בזמן שההתכנסות אינה אחידה בכל נקודה.

<u>נחזור להוכחה</u>

מכיון שמצב i הוא נשנה אז מתקיים עבור כל n : $1 = \sum_{k=1}^{n} P_{i,i}{}^{(n-k)} r_k$. כך מתקיים עבור $n = m_n - l_0$: $1 = \sum_{k=1}^{m_n - l_0} P_{i,i}{}^{(m_n - l_0 - k)} r_k$.

נבחר s קבוע כך ש $m_n - l_0 - s > s$ ונקבל $1 \geq \sum_{k=1}^{s} P_{i,i}{}^{(m_n - l_0 - k)} r_k$.

נשאיף את m_n לאינסוף ונקבל $1 \geq \sum_{k=1}^{s} \lim P_{i,i}{}^{(m_n - l_0 - k)} r_k = \lambda \sum_{k=1}^{s} r_k$

(כל אחד מהמחוברים שבסכום שואף לגבול ולכן סכום של מספר סופי שלהם גם שואף לגבול).

לכן עבור כל s מתקיים $\lambda \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{s} r_k}$. על-ידי השאפת s לאינסוף נקבל $\lambda \leq \frac{1}{E_i}$.

לכן במקרה ש i הוא נשנה אפס נקבל ש $\lambda = 0$. אם הגבול העליון הוא 0 , אז קיים גבול של 0 והוכחנו את הטענה עבור מצב נשנה אפס.
כעת נתייחס למקרה ש i הוא מצב נשנה חיובי.

במקרה זה $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$. נניח ש $\lim P_{i,i}^{(m_n)} = \mu$ כאשר μ הוא הגבול התחתון.

אז נקבל עבור כל s קבוע

$$1 \le \sum_{k=1}^{s} r_k P_{i,i}^{(m_n - l_0 - k)} + \sum_{k=s+1}^{m_n - l_0} r_k \le \sum_{k=1}^{s} r_k P_{i,i}^{(m_n - l_0 - k)} + \sum_{k=s+1}^{\infty} r_k$$

עבור ε נתון נבחר S מספיק גדול כך שעבור כל $s > S$ מתקיים $\sum_{k=s+1}^{\infty} r_k < \varepsilon$. נקבל

$1 - \varepsilon \le \sum_{k=1}^{s} r_k P_{i,i}^{(\mu_n - l_0 - k)}$. אם נשאיף את m_n לאין סוף אז נקבל $1 - \varepsilon \le \mu \sum_{k=1}^{s} r_k$. ולכן

$\mu \ge \frac{1-\varepsilon}{\sum_{k=1}^{s} r_k}$. נשאיף את s לאין סוף ונקבל $\mu \ge \frac{1-\varepsilon}{\sum_{k=1}^{\infty} r_k}$ או $\mu \ge \frac{1-\varepsilon}{E_i}$. זה מתקיים עבור כל ε נתון

ולכן $\mu \ge \frac{1}{E_i}$.

קבלנו $\mu \ge \frac{1}{E_i}$, $\lambda \le \frac{1}{E_i}$. אבל כמובן $\lambda \ge \mu$ (הגבול העליון לא קטן מהגבול התחתון).

לכן $\lambda = \mu = \frac{1}{E_i}$ וקיימת הסתברות גבולית ששווה ל $\frac{1}{E_i}$.