מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ המשך גבולות ונשנות חיובית

שלומי

טענה

נרצה להראות שגם בשרשרת מחזורית $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i נשנה הוא נשנה אפס אם"ם מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$.

הוכחה

נסתכל על שרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ המקיימת $Y_n = X_{nd}$.

בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i הוא מצב נשנה (כי הוא נשנה בשרשרת המקורית ולכן חוזרים אליו באיזשהו שלב בהסתברות 1, אבל חוזרים אליו רק בכפולות של d).

בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i הוא לא מחזורי (כי בשרשרת המקורית, החל ממקום מסוים $P_{i,i}^{(n)} > 0$ לכל n שהוא כפולה שלמה של d).

תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב i בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שווה ל d כפול התוחלת בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ (כי כל צעד ב $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מבטא d צעדים ב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$).

לכן אם באחת השרשרות תוחלת זמן החזרה היא סופית אז גם בשניה היא סופית.

אם ב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$ אז מתקיים בה גם $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(nd)} = 0$ וההסתברות הגבולית היא אפס גם ב $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

אם ב $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$ אז גם ב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$ (כי ניתן בכלל לחזור למצב רק בכפולות של d).

נקבל

מצב נשנה i הוא נשנה אפס בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\Leftrightarrow$ מצב i הוא נשנה אפס בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\Leftrightarrow$

$\overset{1}{\Leftrightarrow}$ בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i הוא נשנה ומתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i הוא נשנה ומתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$.

[1]. על-פי הקריטריון לנשנות אפס במחלקה לא מחזורית.

נציג כאן בטבלה את המקרים השונים של מצבים נשנים חיובית או נשנים אפס ומחזוריים או לא מחזוריים.

	מחזורי	לא מחזורי
נשנה חיובית	לא קיימת הסתברות גבולית. קיימת תת סדרה שבה ההסתברויות הגבוליות הן חיובית וקיימת תת סדרה שבה ההסתברויות הן אפס.	קיימת הסתברות גבולית חיובית ששווה לאחד חלקי תוחלת זמן החזרה למצב.
נשנה אפס	קיימת הסתברות גבולית של אפס. יש אין סוף זמנים שבהם הסתברויות המעבר הן בדיוק אפס. יש אין סוף זמנים שבהם היא חיובית. אבל היא שואפת לאפס.	קיימת הסתברות גבולית של אפס.

הגדרנו וקטור הסתברויות סטציונרית של שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר M כוקטור הסתברויות המקיים $\pi M = \pi$.

<u>טענה</u>
במחלקה בלתי פריקה ולא מחזורית שכל מצביה הם נשנים חיובית אז וקטור ההסתברויות הגבוליות הוא וקטור סטציונרי יחיד.

קצת אינטואיציה בנושא: טבעי שהגבול יהיה נקודת שבת. ראינו שיש התכנסות מכל מצב התחלתי אל וקטור מסוים. לכן שום וקטור אחר לא יכול להיות נקודת שבת. צריך להראות שהוקטור הגבולי הוא וקטור הסתברויות, זאת אומרת שרכיביו מסתכמים ב 1. במחלקה סופית בלתי פריקה ובלתי מחזורית, נבחר מצב מסוים שנקרא לו 1. מתקיים עבור כל n סופי $\sum_i P_{1,i}^{(n)} = 1$ כאשר הסכימה היא על מצבי השרשרת. מתקיים $\sum_i \lim_{n\to\infty} P_{1,i}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_i P_{1,i}^{(n)} = 1$ (כאשר סוכמים מספר סופי של גבולות אז המעבר הראשון מותר).

<u>לגבי שרשרת נשנת חיובית ומחזורית</u>
נסתכל על מצב מסוים בשרשרת בלתי פריקה בעלת מחזור d נקרא לו מצב 0. ממצב זה ניתן להגיע לכל מצבי השרשרת. נחלק את מצבי השרשרת לפי שארית החלוקה ב d של הזמנים שניתן להגיע אלהם. כל מצב נמצא בדיוק באחת מקבוצות אלה (אחרת המחזור לא היה שווה ל d). כל אחת מהקבוצות האלה היא מחלקה בלתי פריקה בעלת מחזור 1 של השרשרת בעלת מטריצת מעבר M^d. כאשר M היא מטריצת המעבר של השרשרת המקורית. לכן לכל קבוצה כזאת יש וקטור סטציונרי יחיד.
נסתכל על הוקטור שהוא ממוצע של d הוקטורים הסטציונרים האלה. ברור שסכום רכיביו הוא 1.
<u>טענה</u>
זהו וקטור סטציונרי של השרשרת המחזורית.
<u>הסבר</u>
נסתכל על הוקטור הסטציונרי היחיד של הקבוצה שאליה שיך מצב 0. נקרא לוקטור זה π.
נראה ש πM הוא וקטור סטציונרי של המטריצה M^d בקבוצה שאליה ניתן להגיע עם שארית חלוקה 1. מתקיים $(\pi M)M^d = (\pi M^d)M = \pi M$ ולכן הוא אכן וקטור סטציונרי של קבוצה זו. מהיחידות של וקטור סטציונרי במחלקה לא מחזורית, נקבל שזהו הוקטור היחיד. באינדוקציה נוכל לקבל שעבור כל $0 \le k \le d-1$ πM^k הוא הוקטור הסטציונרי של קבוצת המצבים שאליהם ניתן להגיע בשארית חלוקה של k.

<u>טענה</u> (לגבי יחידות)
גם במחלקה מחזורית קיים לכל היותר וקטור סטציונרי אחד.
<u>הסבר</u>
וקטור סטציונרי הוא נקודת שבת. נקודת שבת של M היא בהכרח גם נקודת שבת של M^d.
בכל אחת מ d הקבוצות יש נקודת שבת יחדה ל M^d שהיא מטריצת מעבר של שרשרת לא מחזורית. לכן בכל וקטור סטציונרי של השרשרת כולה, אוסף הרכיבים ששיכים לקבוצה מסוימת הוא יחיד עד כדי מכפלה בקבוע. מכיון שהתהליך עובר על כל הקבוצות בסדר ציקלי אז לגבי כל קבוצה, אוסף רכיביה צריך להסתכם ב $\frac{1}{d}$. לכן קיים רק וקטור סטציונרי יחיד.

<u>דוגמא</u> לחישוב וקטור הסתברויות סטציונרי
נתונה שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

וקטור ההסתברויות הסטציונרי מקיים

$$(\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\end{pmatrix}$$

ו

$$\pi_1+\pi_2=1$$

לכן

$$\begin{cases}0+0.5\pi_2=\pi_1\\ \pi_1+0.5\pi_2=\pi_2\\ \pi_1+\pi_2=1\end{cases}$$

לכן מתקבל וקטור הסתברויות סטציונרי יחיד $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

<u>דוגמא</u>

שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

קיימות שתי מחלקות בלתי פריקות קיים וקטור סטציונרי $(1,0,0)$ וגם וקטור סטציונרי $(0,0.5,0.5)$.
כל קומבינציה קמורה שלהם מקיימת את מערכת המשוואת $\pi M=\pi$. לכן אוסף כל הוקטורים הסטציונרים הוא $a(1,0,0)+(1-a)(0,0.5,0.5)$ עבור כל $0\le a\le 1$.

<u>דוגמא</u>

שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

יש שתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים סופגים. אוסף הוקטורים הסטציונרים הוא $a(1,0,0)+(1-a)(0,0,1)$ עבור $0\le a\le 1$. בכל וקטור סטציונרי מתקיים $\pi_2=0$.
זה מבטא את העובדה שמצב 2 אינו נשנה חיובי. הוא מצב חולף.

בשרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

יש וקטור הסתברויות סטציונרי יחיד $(0.5,0.5)$. זה מבטא את העובדה שהשכיחות של הביקורים במצבים השונים שואפת לחצי עבור כל מצב התחלתי. אבל אין הסתברויות גבוליות למצבים כי השרשרת מחזורית.

<u>דוגמא</u> לתופעה זו בשרשרת אינסופית

שרשרת מרקוב שמרחב מצביה הם השלמים האי-שליליים. נניח ש $P_{0,i}=0.5^i$ עבור $i\ge 1$ ו $P_{i,0}=1$ עבור כל $i\ge 1$. מצב 0 הוא נשנה חיובי כי בכל מקרה כאשר מתחילים בו אז חוזרים אליו תוך שני צעדים. לכן תוחלת זמן החזרה אליו היא 2 ויש לו הסתברות סטציונרית $\frac{1}{2}$. אבל אין לו הסתברות גבולית. יש שני גבולות חלקיים שאחד מהם הוא 1 והשני הוא 0.

<u>שאלה</u>
מתי קיימת הסתברות גבולית עבור שרשרת מחזורית (מחזורית = בעלת מחזור גדול מ 1) ?

<u>תשובה</u>
כאשר המצב חולף או נשנה אפס אז ההסתברות הגבולית היא אפס.

<u>דוגמא</u>
האם הילוך מקרי סימטרי על הישר הוא נשנה חיובי ?

מצבי השרשרת הבלתי פריקה הזאת הם נשנים אפס.
<u>נימוק ראשון:</u>
ראינו ש $P_{0,0}^{(2n+1)}=0$ לכל n וש $P_{0,0}^{(2n)}$ מתנהג כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$ כאשר $n\to\infty$. מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$
וגם כמובן הגבול של סדרת אפסים הוא 0. ולכן מצב 0 ואיתו כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה אינם נשנים חיובית.
<u>נימוק שני:</u>
אילו למצב 0 היתה הסתברות סטציונרית חיובית אז משיקולי סימטריה, לכל מצבי השרשרת הבלתי פריקה היתה באותו וקטור סטציונרי אותה הסתברות סטציונרית חיובית. כך סכום ההסתברויות הסטציונריות על-פני המצבים היה מסתכם ב ∞. זה כמובן לא יתכן.
<u>נימוק שלישי:</u>
ממצב 0 הולכים למצב 1 או למצב -1. נראה שתוחלת מספר הצעדים עד חזרה ממצב 1 למצב 0 היא ∞. כך תוחלת מספר הצעדים עד חזרה מ 0 ל 0 היא ∞.
יהי $e_{1,0}$ - תוחלת זמן ההגעה מ 1 ל 0, $e_{2,1}$ - תוחלת זמן ההגעה מ 2 ל 1 , $e_{2,0}$ - תוחלת זמן ההגעה מ 2 ל 0.
משיקולי סימטריה מתקיים $e_{2,1}=e_{1,0}$ לכן $e_{2,0}=e_{2,1}+e_{1,0}=2e_{1,0}$.
מתקיים: $e_{1,0}=0.5\cdot 1+0.5(e_{2,0}+1)$ (כי כאשר מתחילים ב 1 או שמבזבזים צעד והולכים ישירות ל 0 או שמבזבזים צעד והולכים ל 2 ואז צריך לחזור מ 2 ל 0) לכן $e_{1,0}=1+e_{1,0}$. למשוואה זו אין פתרון סופי ולכן תוחלת זמן החזרה מ 1 ל 0 אינה סופית.

<u>שאלה</u>
מבצעים סדרה אינסופית של הטלות של קוביה הוגנת. יהי S_n סכום n ההטלות הראשונות.
עבור n גדול, מהי ההסתברות ש S_n הוא כפולה שלמה של 7 ?

<u>תשובה</u>
נגדיר שרשרת ששבעת מצביה הם השאריות האפשריות בחלוקה ב 7.

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

זאת מטריצה בלתי פריקה כי לכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר (למשל בצעדים של 1). זאת היא מטריצה לא מחזורית כי למשל ניתן לחזור ממצב לעצמו בשני צעדים או בשלושה צעדים. במטריצה בלתי פריקה ונשנית חיובית קיים וקטור הסתברויות סטציונריות יחיד. אם המטריצה היא גם לא מחזורית אז קיימות הסתברויות גבוליות ששות לרכיבי הוקטור הסטציונרי. כאן משיקולי סימטריה הוקטור הסטציונרי היחיד הוא $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$.

<u>הגדרה</u>

מטריצה דו-סטוכסטית היא מטריצה סטוכסטית שגם כל עמודה שלה מסתכמת ב 1.

<u>טענה</u>

במטריצה דו סטוכסטית סופית קיים וקטור הסתברויות סטציונרי שכל רכביו שווים.

<u>נימוק</u>

$\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_{i,j}$ כאשר ה- $a_{i,j}$ מסתכמים ב 1 עבור כל j .

המטריצה הקודמת של הטלות הקוביה היתה סטוכסטית כפולה ובלתי פריקה . מכאן יכולנו להסיק לגביה את ההסתברויות הגבוליות.

<u>הערה</u>

לגבי שרשרת אינסופית, אין וקטור באורך אינסופי שכל רכיביו שווים ושהם מסתכמים ב 1.