מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ הרצאה 7

שלומי

טענה

נשנות חיובית היא תכונה מחלקתית.

הוכחה

נניח שמצבים i ו j מקושרים ומתקיים שלגבי מצב i לא קיים גבול אפס ל $P_{i,i}^{(n)}$ כאשר $n \to \infty$. אז קיימת תת סדרה $n_k \to \infty$ כך ש $\lim_{n_k \to \infty} P_{i,i}^{(n_k)} = \lambda$ כאשר $\lambda > 0$. מכיון שמצבים i ו j הם מקושרים אז קיים מסלול באורך t מ j ל i וקיים מסלול באורך s מ i ל j.

מתקיים $P_{j,j}^{(n_k+t+s)} \geq P_{j,i}^{(t)} P_{i,i}^{(n_k)} P_{i,j}^{(s)}$ וכאשר $n_k \to \infty$ אז הביטוי שבאגף שמאל לא יכול לשאוף לגודל שקטן מ $P_{j,i}^{(t)} P_{i,j}^{(s)} \lambda$. לכן הוא לא יכול לשאוף לאפס.

טענה

נשנות אפס היא תכונה מחלקתית.

הסבר

ראינו כבר בתקציר קודם שנשנות היא תכונה מחלקתית. כעת ראינו שנשנות חיובית היא תכונה מחלקתית. נניח שמצבים i ו j הם מקושרים וש i הוא נשנה אפס. מכיון ש i הוא נשנה אז גם j הוא נשנה. מכיון ש i הוא נשנה אפס אז הוא אינו נשנה חיובי ולכן גם j אינו נשנה חיובי. מצב שהוא נשנה אך לא נשנה חיובי הוא נשנה אפס. לכן מצב j הוא נשנה אפס.

טענה

בשרשרת סופית אין מצבים נשנים אפס.

הסבר

כל מצב שאינו ארגודי הוא חולף.

נראה שלגבי מצב ארגודי בשרשרת סופית, תוחלת זמן החזרה אליו היא סופית.

יהי Z - זמן החזרה הראשונה למצב i.

למצב i ארגודי בשרשרת סופית בת M מצבים ניתן להגיע מכל מצב אחר תוך לכל היותר M צעדים.

ממצב j יש הסתברות של a_j להגיע למצב i בלכל היותר M צעדים. מתקיים עבור כל j ש $a_j > 0$

.

נגדיר a להיות הערך המינימלי של ערכי a_j. המינימום של מספר סופי של מספרים חיובים הוא חיובי.

הסיכוי לא לחזור למצב i בשום שלב עד שלב n הוא לא גדול מ $(1-a)^{\left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor}$.

לפי נוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה שמקבל רק ערכים שלמים אי שליליים, תוחלת זמן החזרה למצב i לא גדולה מ $\infty > E(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Z \geq n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1-a)^{\left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor} < \infty$.

בעזרת הטענות הבאות, נוכל גם לראות <u>בדרך נוספת</u> שאין מצבים נשנים אפס בשרשרת סופית.

טענה

לגבי מצב j שאינו נשנה חיובי מתקיים עבור כל מצב i : $\lim_{n \to \infty} P_{i,j}^{(n)} = 0$.

הוכחה

מתקיים $P_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)}$. הטור $f_{i,j}^{(k)}$ הוא טור מתכנס (שמסתכם לכל היותר ב 1).
לכן עבור $\varepsilon > 0$ נתון, קיים לו זנב החל ממקום N_1 שקטן מ ε . מכיון שמצב j הוא מצב שאינו נשנה חיובי, אז קיים N_2, כך שעבור כל $n > N_2$ מתקיים $P_{j,j}^{(n)} < \varepsilon$. נבחר $N = N_1 + N_2$, אז עבור כל $n > N$. סכום N_1 האיברים הראשונים בטור המכפלות קטן מ ε וסכום יתר האיברים גם קטן מ ε .
לכן עבור כל $n > N$, $P_{i,j}^{(n)} < 2\varepsilon$.

<u>טענה</u>
במחלקה סופית של מצבים קיים לפחות מצב נשנה חיובי אחד.

<u>הוכחה</u>
נניח שכל המצבים אינם נשנים חיובים, אז עבור כל מצב j , קיים N_j כך שעבור כל $n > N_j$ מתקיים $P_{1,j}^{(n)} < \frac{1}{M}$ כאשר M הוא מספר מצבי המחלקה. נבחר $N = \max\{N_j\}$. עבור $n > N$ מסוים הסתברויות המעבר ממצב 1 למצבים השונים מסתכמים בפחות מ 1 וקבלנו סתירה.
לכן בכל מחלקה סופית קיים לפחות מצב נשנה חיובי אחד.

<u>מסקנה</u>
בשרשרת סופית אין מצבים נשנים אפס.

<u>הסבר</u>
כאמור בכל מחלקה סופית יש לפחות מצב נשנה חיובי אחד. מכיון שנשנות חיובית היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים במחלקה של המצב הזה הם נשנים חיובית. כל מחלקה ארגודית סופית היא מחלקה של מצבים נשנים חיובית.

<u>נושא</u>: תנאי האיזון המפורט
בכל וקטור סטציונרי מתקיים עבור כל מצב i : $\pi_i = \sum_j \pi_j P_{j,i}$.

<u>הגדרת</u> תנאי האיזון המפורט
תנאי האיזון המפורט אומר יותר מזה. הוא אומר שעבור כל i, j מתקיים $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$.
נראה שעבור כל וקטור הסתברויות שעליו מתקיים תנאי האיזון המפורט, מתקיים שהוא וקטור סטציונרי.
<u>נימוק</u>
אם עבור מצב i מסוים מתקיים עבור כל מצב j מתקיים $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$ אז אם נסכום את השוויונות על-פני ערכי j נקבל באגף שמאל $\sum_j \pi_i P_{i,j} = \pi_i$ (זאת מכיון שכל שורה מסתכמת ב 1 במטריצה סטוכסטית). באגף ימין נקבל $\sum_j \pi_j P_{j,i}$ ולכן $\pi_i = \sum_j \pi_j P_{j,i}$ ולכן זהו וקטור סטציונרי.

<u>גרפים</u>
נסתכל על משפחה של שרשרות מרקוב שהן גרפים שבהם כאשר נמצאים בצומת אז בוחרים באקראי בסיכוי שווה את אחד השכנים ועוברים אליו. יהי d_i הדרגה של צומת i בגרף. יהי $\sum d_i$ סכום הדרגות בגרף. נראה שהוקטור שבו עבור כל j : $\pi_j = \frac{d_j}{\sum d_i}$ הוא וקטור סטציונרי. ראשית ברור שסכום רכיביו הוא 1. נראה שוקטור זה מקיים את תנאי האיזון המפורט. נניח שצמתים j, k הם צמתים שכנים,

אז מתקיים $\frac{d_k}{\sum d_i}\frac{1}{d_k}=\frac{d_j}{\sum d_i}\frac{1}{d_j}$. לכן זהו וקטור סטציונרי. אם הגרף הוא קשיר אז הוא מהווה שרשרת בלתי פריקה ויש גם וקטור סטציונרי יחיד.

<u>תרגיל</u>

פרש מבצע הילוך מקרי על לוח השחמט. הוא מתחיל בפינה. מהי תוחלת מספר הצעדים עד שהוא יחזור לאותה פינה ?

<u>פתרון</u>

בלוח השחמט הפרש יכול להגיע באיזשהו שלב מכל משבצת לכל משבצת. המסע של הפרש הוא מסע על גרף קשיר. הדרגה של המשבצת הפינתית היא 2. אם סכום הדרגות הוא D אז ההסתברות הסטציונרית של משבצת פינתית היא $\frac{2}{D}$ ותוחלת הזמן עד חזרה לפינה היא $\frac{D}{2}$.

<u>דוגמא</u> לשרשרת שבה יש וקטור סטציונרי שלו מקיים את תנא האיזון המפורט

שרשרת בעלת שלושה מצבים ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש וקטור סטציונרי יחיד $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ אך למשל מהמצב הראשון יש מעבר למצב השני בעוד שמהמצב השני אין מעבר למצב הראשון. לכן אין שימור של מאזן בין שנהם ($\frac{1}{3}\cdot 1\neq\frac{1}{3}\cdot 0$).

<u>סוגיה</u>

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $\{0,1,2,\cdots\}$ ובעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & & \\ q & 0 & p & 0 & \cdot & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdot & \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

עבור כל i ניתן לעבור ממצב בעל אינדקס לא יותר גבוה מ i למצב בעל אינדקס גבוה מ i רק ממצב i. בכיוון ההפוך המעבר אפשרי רק דרך מצב $i+1$. שכיחות המעברים בשני הכיווני שווה. לכן אם קיים וקטור הסתברויות סטציונרי אז מתקיים עבור כל $i\geq 1$: $\pi_i p=\pi_{i+1}q$. מהיחסים האלה ומכך שרכיבי כל וקטור סטציונרי מסתכמים ב 1, אפשר לקבל את ההסתברויות הסטציונריות.

מתקיים $\pi_1=\pi_0/q$ ועבור כל $i\geq 1$: $\pi_i=\pi_1\left(\frac{p}{q}\right)^{i-1}=\pi_0\frac{p^{i-1}}{q^i}$. מכיון ש $\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i=1$, אז

מתקיים $$\pi_0=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p^{i-1}}{q^{i-1}}/q}=\frac{1}{1+\frac{1}{1-p/q}/q}=\frac{1}{1+\frac{1}{q-p}}=\frac{q-p}{q-p+1}=\frac{q-p}{2q}$$

מפתרון זה מסתבר שקיים וקטור הסתברויות סטציונריות רק אם $q>p$.

וקטור הסתברויות סטציונריות קיים רק אם $q > p$.
ממצב 0 בהכרח עוברים למצב 1.
אם $q < p$, אז כמו בהילוך מקרי לא סימטרי, לא חוזרים בודאות ממצב 1 למצב 0 ולכן מצב 0 הוא חולף.
אם $q = p$, אז כמו בהילוך מקרי סימטרי, תוחלת זמן ההגעה ממצב 1 למצב 0 היא אין סוף ולכן גם תוחלת זמן החזרה ממצב 0 לעצמו היא אין סוף ולכן מצב 0 הוא נשנה אפס.

הסתברויות גבוליות בשרשרות סופיות

דוגמא

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

חשבו את $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(n)}$.

תשובה

ממצב 1 בהסתברות 1 נגיע למחלקה $\{2,3\}$. מחלקה זו היא לא מחזורית וקיים בה וקטור הסתברויות סטציונריות יחיד $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(n)} = \frac{2}{3}$.

דוגמא

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

1	0	0	0	0
0.3	0.2	0.1	0	0.4
0.1	0.2	0.3	0.1	0.3
0	0	0	0	1
0	0	0	0.5	0.5

שאלות

א. האם קיים $\lim_{n\to\infty} P_{2,4}^{(n)}$ ואם כן למה הוא שווה ?

ב. חשבו את תוחלת זמן ההגעה מכל מצב חולף למחלקה של מצבים נשנים.

תשובות

א.

אם מגיעים למחלקה הבלתי פריקה ולא מחזורית $\{4,5\}$ אז במקרה זה ההסתברות הגבולית של מצב 4 היא $\frac{1}{3}$ שזאת ההסתברות הסטציונרית שלו במחלקה.

צריך לחשב את ההסתברות להגיע ממצב 2 למחלקה $\{4,5\}$. נקרא להסתברות זו a_2 ונקרא להסתברות להגיע ממצב 3 למחלקה $\{4,5\}$ - a_3 . מתקיים:

$$\begin{cases} a_2 = 0.3\cdot 0 + 0.2a_2 + 0.1a_3 + 0\cdot 1 + 0.4\cdot 1 \\ a_3 = 0.1\cdot 0 + 0.2a_2 + 0.3a_3 + 0.1\cdot 1 + 0.3\cdot 1 \end{cases}$$

<u>הסבר</u> לחלק מגורמים:
ממצב 2 עוברים בהסתברות 0.3 למצב 1 ואז לעולם כבר לא נגיע למחלקה $\{4,5\}$, בהסתברות 0.2 נשארים בו וההסתברות נשארת אותה הסתברות ולמשל בהסתברות 0.4 מגיעים כבר למחלקה $\{4,5\}$.
הפתרון המבוקש הוא $\frac{1}{3}\cdot a_2$ כאשר כאמור $\frac{1}{3}$ היא ההסתברות הסטציונרית של מצב 4 במחלקתו הלא מחזורית.

<u>ב</u>.
יהיו e_i - תוחלת זמן ההגעה ממצב i למחלקה של מצבים נשנים.

$$\begin{cases} e_2 = 1 + 0.3\cdot 0 + 0.2e_2 + 0.1e_3 + 0\cdot 0 + 0.4\cdot 0 \\ e_3 = 1 + 0.1\cdot 0 + 0.2e_2 + 0.3e_3 + 0.1\cdot 0 + 0.3\cdot 0 \end{cases}$$

<u>הסבר</u>
כשמתחילים במצב חולף, מבצעים בכל מקרה צעד אחד ואז מגיעים למצב אחר שלגביו יש איזשהי תוחלת למספר הצעדים עד הגעה למחלקה של מצבים נשנים. לגבי מצבים נשנים בהם תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למחלקה של נשנים היא 0.

<u>שאלה</u>
נתונה שרשרת בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

0.2	0.3	0.1	0.3	0.1
0.1	0.2	0.3	0	0.4
0	0	0	0	1
0	0	0	0	1
0	0	0.3	0.7	0

מצאו $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n)}$ ואת $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n+1)}$.

<u>פתרון</u>
מהמצבים החולפים 1 ו 2 ברור שנגיע למחלקה הלא פריקה היחידה $\{3,4,5\}$. כדי שתהיה אפשרות להיות במצב 3 בצעדים הזוגיים, צריך להגיע למצבים 3 או 4 בצעד זוגי או להגיע למצב 5 בצעד אי זוגי.
אם זה כבר יתרחש, אז ההסתברות הגבולית של מצב 3 תהיה 0.3 ושל מצב 4 תהיה 0.7 .
יהי a_1 ההסתברות להגיע למצבים 3 או 4 במספר זוגי של צעדים או להגיע למצב 5 במספר אי זוגי של צעדים , זאת כאשר מתחילים במצב 1.
יהי a_2 ההסתברות להגיע למצבים 3 או 4 במספר זוגי של צעדים או להגיע למצב 5 במספר אי זוגי של צעדים , זאת כאשר מתחילים במצב 2.
מתקיים:

$$\begin{cases} a_1 = 0.2(1-a_1) + 0.3(1-a_2) + 0.1\cdot 0 + 0.3\cdot 0 + 0.1\cdot 1 \\ a_2 = 0.1(1-a_1) + 0.2(1-a_2) + 0.3\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0.4\cdot 1 \end{cases}$$

(אם למשל חוזרים מהמצב לעצמו ורצינו מספר זוגי של צעדים עד הגעה לקבוצה אחת או מספר אי זוגי להגעה לקבוצה אחרת, אז כעת אנחנו צריכים את בדיוק ההפך.)

מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n)} = a_1 \cdot 0.3$, $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n+1)} = (1-a_1)0.3$.

<u>הערה</u>

בפתרון הזה נצלנו את העובדה שידוע לאיזה מחלקה של מצבים נשנים מגיעים. כך ההסתברויות להיות במצב 5 לאחר מספר זוגי או אי זוגי של צעדים מסתכמות ב 1. אילו אפשר היה גם להגיע למחלקה אחרת, אז הן לא היו מסתכמות ב 1.

פתרון למקרה כזה ניתן <u>בדרך הנוספת</u> הבאה.

<u>דרך נוספת</u>

ניתן להעלות את מטריצת המעבר בריבוע. המטריצה המתקבלת היא מטריצת המעבר של התהליך בקפיצות של שני שלבים. זו מטריצת מעבר של שרשרת שכל מצביה הם לא מחזוריים. ההסתברויות הגבוליות שהתהליך המקורי יבקר במצב מסוים בשלב שהוא קבוע גדול זוגי שווה להסתברות שהתהליך החדש יבקר במצב לאחר מספר גדול של צעדים שאינו דוקא זוגי. את אלה נוכל למצוא באותה דרך שבה השתמשנו בתקציר זה לגבי שרשרת שמצביה הנשנים הם לא מחזוריים.

<u>דוגמא</u>

נתונה שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא את $\lim_{n\to\infty} P_{1,4}^{(2n)}$:

נעלה את מטריצת המעבר ברבוע ונקבל מטריצה

$$\begin{pmatrix} 0.03 & 0.02 & 0.24 & 0.35 & 0.36 \\ 0.04 & 0.03 & 0.26 & 0.38 & 0.29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת צריך לחשב את סיכויי ההגעה למצב 4 בשרשרת שזו מטריצת המעבר שלה.

יהי a_1 סיכוי ההגעה למצב 4 כאשר מתחילים במצב 1.

יהי a_2 סיכוי ההגעה למצב 4 כאשר מתחילים במצב 2.

מתקיים

$$\begin{cases} a_1 = 0.03a_1 + 0.02a_2 + 0.24\cdot 0 + 0.35\cdot 1 + 0.36\cdot 0 \\ a_2 = 0.04a_1 + 0.03a_2 + 0.26\cdot 0 + 0.38\cdot 1 + 0.29\cdot 0 \end{cases}$$

ואיך מזה נקבל את ההסתברויות הגבוליות בזמנים האי זוגיים ?

<u>תשובה</u>: אם נכפיל את וקטור ההסתברויות הגבוליות של הזמנים הזוגיים במטריצת המעבר אז נקבל את ההסתברויות הגבוליות בזמנים האי זוגיים. ניתן אלטרנטיבית למצוא את וקטור ההסתברויות של השלב הבא אחרי השלב ההתחלתי, ולהכפיל אותו במטריצה הגבולית של הזמנים הזוגיים.

שאלה

ומה אפשר לעשות אם המחזור היה לאו דוקא 2 ?

תשובה

נשתמש באותה דרך כללית. נעלה את המטריצה המקורית בחזקת d שהוא כאן מספר שהמחזור של כל מצבי השרשרת מחלק אותו. כך נקבל מטריצה לא מחזורית. במטריצה זו שוב נמצא את ההסתברויות המבוקשות לפי אותה גישה שבה השתמשנו בקובץ זה לגבי שרשרות לא מחזוריות.

שאלה

נתונה שרשרת מרקוב בלתי פריקה בת 5 מצבים ומחזור 3.

האם קיים מצב בעל הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$?

תשובה: כן

ניתן לחלק את מצבי השרשרת ל 3 קבוצות זרות כך שבכל שלב עוברים מקבוצה לקבוצה ושכיחות הביקורים בכל קבוצה היא $\frac{1}{3}$. מכיון שאין שלושה מספרים שלמים הגדולים מ 1 שמסתכמים ב 5, אז בהכרח בלפחות אחת משלושת הקבוצות יש בדיוק מצב אחד. במצב זה נבקר בדיוק בכל צעד שלישי. למצב זה יש הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$.

סוגיה

נתונה שרשרת מרקוב על מרחב המצבים שהם השלמים האי-שליליים. נניח שמתקיים עבור כל $i \geq 1$ $P_{0,i} = a_i$ ו $P_{i.i-1} = 1$.

מצב 0 הוא עבור כל סדרה, מצב נשנה, זאת כי מכל מצב בהכרח חוזרים אליו.

השרשרת היא אי פריקה אם יש אינסוף ערכי i שעבורם $a_i > 0$ כי אז ניתן להגיע לכל מצב ממצב 0 שאליו מגיעים בכל מקרה מכל מצב.

אם השרשרת אי פריקה אז לכל המצבים יש את אותו מחזור.

אם תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא סופית אז מצב 0 הוא נשנה חיובי.

אם מצב 0 הוא נשנה חיובי אז בכל מקרה קיימת התפלגות סטציונרית.

אם קיימת התפלגות סטציונרית והשרשרת לא מחזורית, אז קיימת הסתברות גבולית.

אם מצבי השרשרת אינם נשנים חיובית, אז בכל מקרה קיימת הסתברות גבולית אפס לכל מצבי השרשרת. אבל אין התפלגות גבולית. התפלגות סטציונרית קיימת רק אם השרשרת נשנית חיובית והתפלגות גבולית קיימת רק אם יש התפלגות סטציונרית והשרשרת לא מחזורית.

דוגמא למקרה שכל המצבים הם נשנים אפס: $P_{0,n} = \frac{c}{n^2}$ עבור כל $n \geq 1$ ועבור c מתאים.

כאן תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא אינסוף (אם מגיעים ממצב 0 למצב n אז יש צעד אחד הלוך ו n צעדים חזור ובסך הכל $n+1$ צעדים עד חזרה למצב 0 ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2}(n+1) = \infty$). לכן ההסתברות הגבולית של מצב 0 היא 0. מכיון שנשנות אפס היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים הם נשנים אפס וההסתברות הגבולית של כל מצב היא 0 .

דוגמא למקרה שכל המצבים הם נשנים חיובית: $P_{0,n} = \frac{c}{n^3}$ עבור כל $n \geq 1$ ועבור c מתאים.

כאן תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא סופית ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n^3}(n+1)<\infty$). לכן מצב 0 הוא נשנה חיובי. מכיון שלמשל ניתן לחזור למצב 0 בשני צעדים או שלושה צעדים אז מצב 0 הוא לא מחזורי. מכיון שנשנות חיובית ואי מחזוריות הן תכונות מחלקתיות, אז כל המצבים הם נשנים חיובית ולא מחזוריים. לכן לכל מצב יש הסתברות גבולית חיובית ממש.

<u>דוגמא</u> לכך שלא קיימות הסתברויות גבוליות למצבים השונים: $P_{0,n}=\frac{c}{n^3}$ עבור כל $n\geq 1$ אי זוגי ו $P_{0,n}=0$ עבור כל $n\geq 0$ זוגי. כאן המצבים הם נשנים חיובית אך מחזוריים (ניתן לחזור ממצב לעצמו רק במספר זוגי של צעדים).