<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תהליכי הסתעפות</u>

שלומי

<u>נושא</u> תהליכי הסתעפות

מדובר בשרשרת מרקוב שבה בהינתן $X_n = m$ אז X_{n+1} מתפלג כסכום של m משתנים בלתי תלויים שווי התפלגות שהיא התפלגות קבועה מסוימת. ניתן לראות את התהליך כתהליך התפתחות של שושלת שבה X_n הוא מספר הפרטים בדור ה-n.

נעשה שימוש בפונקציה היוצרת של התפלגות מספר הצאצאים של פרט.

<u>דוגמא</u>

אם מספר הצאצאים של פרט מתפלג באופן הבא $P(Z=0)=0.5$, $P(Z=1)=0.2$, $P(Z=3)=0.3$ אז הפונקציה היוצרת היא $0.5+0.2t+0.3t^3$.

<u>טענה</u>

בהינתן שמספר הפרטים בדור ה-0 הוא 1 אז הפונקציה היוצרת של מספר הפרטים בדור ה-n מתקבלת על-ידי הרכבה n פעמים של הפונקציה היוצרת של מספר הצאצאים של פרט: $g(g(g(...g)))$.

<u>נימוק</u>

הפונקציה היוצרת של סכום משתנים בלתי תלויים שווה למכפלת הפונקציות היוצרות של המשתנים.
כאן המשתנים הם שווי התפלגות ולכן שווי פונקציה יוצרת. $g_{X_n} = \sum P(X_{n-1}=k)g^k$, כאשר הכוונה היא להעלאה בחזקת k .
זה שווה ל $g_{X_{n-1}}(g)$ ובאינדוקציה נקבל את הטענה לגבי הרכבה n פעמים.

<u>שימוש בטענה</u>

נראה שאם מספר הצאצאים מתפלג $G(p)$ אז מספר הצאצאים בדור השני מתפלג גם גיאומטרית עם פרמטר אחר.

הפונקציה היוצרת היא: $\frac{pt}{1-qt} = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}t^k$. נבצע הרכבה $g(g(t))$ ונקבל

$$\frac{p\frac{pt}{1-qt}}{1-q\frac{pt}{1-qt}} = \cdots = \frac{p^2t}{1-(1-p^2)t}$$

ולכן מספר הפרטים בדור השני מתפלג $G(p^2)$.

<u>שימוש נוסף</u>

מציאת התפלגות מספר הפרטים בדור מסוים. נניח ש $(X_0=1)$ ו

$$P(Z=0)=P(Z=1)=P(Z=2)=\frac{1}{3}$$

מצאו $P(X_2=2)$.

$$g(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}t^2$$

$$g(g(t))=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}t^2\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}t^2\right)^2$$

וצריך למצוא את המקדם של t^2 בפונקציה היוצרת.

נפתור גם בדרך אלטרנטיבית:

$$P(X_2=2)=P(X_1=0)\cdot 0+P(X_1=1)\cdot\frac{1}{3}+P(X_1=2)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)=\cdots$$

כללית לגבי פונקציה יוצרת מתקיים ש $g(0)$ הוא האיבר החופשי.

איך נחשוף איברים נוספים:

אם נגזור k פעמים אז כל החזקות הנמוכות מ k יתאפסו. אם נציב 0 אז כל החזקות הגבוהות מ k יתאפסו. מה שישאר זה $k!$ כפול המקדם של t^k. לכן על-ידי חלוקה ב $k!$ נקבל את המקדם של t^k.

המצב 0 הוא מצב סופג כי אם נגיע אליו אז לא יהיו בכל מקרה עוד צאצאים.
בהנחה שבהתפלגות מספר הצאצאים של פרט יש הסתברות חיובית לקבלת אפס צאצאים, אז מכל המצבים האחרים יש מסלול למצב 0 שממנו אין דרך חזרה אליהם. הם לא ארגודים ולכן הם חולפים.
זה לא אומר שבוודאות נגיע למצב 0.

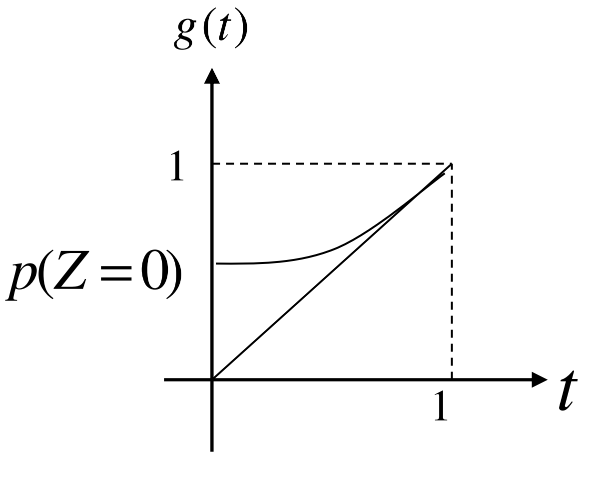
הכחדות היא הגעה למצב 0.
יהי t שווה לסיכויי ההכחדות כאשר מתחילים עם פרט אחד. מתקיימת המשוואה $t=g(t)$.

הסבר

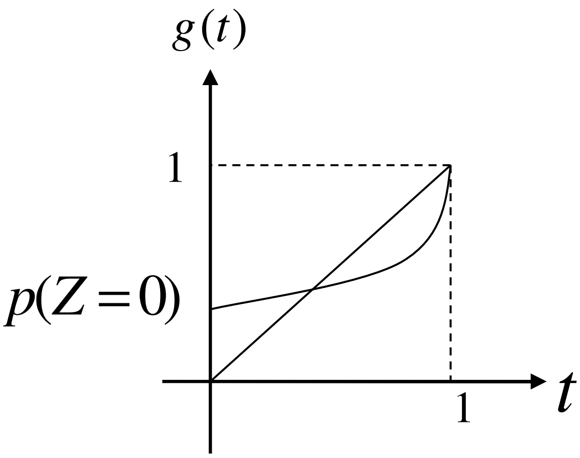
אם בדור הראשון יתקבלו k פרטים אז סיכויי ההכחדות יהיו כבר t^k כי יהיה מדובר ב k שושלות בלתי תלויות שכל אחת מהן צריכה להכחד.

מציאת ההסתברות להכחדות

בטור החזקות $g(t)$ סכום המקדמים הוא 1 כי מדובר בסכום ההסתברויות לקבלת מספר צאצאים מסוים. לכן מתקיים תמיד $g(1)=1$. ננסה לבדוק מתי יש פתרונות נוספים. אם יש פתרונות נוספים אז ננסה לקבוע מי מהם משקף את סיכויי ההכחדות.
אם נגזור את הטור ונציב 1 אז בנקודה 1 יתקבל ש $g'(1)=\mu$, כאשר μ היא תוחלת מספר הצאצאים של פרט. הנגזרת היא מונוטונית עולה, לכן אם $\mu<1$ אז עבור כל $t<1$ הנגזרת קטנה מ 1. מכיון שאנו מניחים שיש הסתברות חיובית לקבלת אפס צאצאים אז $g(0)>0$. מכאן נקבל ש $g(t)>t$ עבור כל $t<1$. לכן הפתרון היחיד למשוואה הוא הפתרון הטריוויאלי $t=1$.



אם $\mu=1$ והתהליך הוא לא מנוון זאת אומרת ש $P(Z=1)\neq 1$ אז הנגזרת של $g(t)$ שווה ל 1 עבור $t=1$ ומכיון שהיא מונוטונית עולה אז היא קטנה מ 1 עבור $t<1$ ולכן הפתרון היחיד הוא שוב $t=1$ ויש הכחדות בהסתברות 1.
אם $\mu>1$ אז הנגזרת בנקודה 1 היא גדולה מ 1 ויש פתרון נוסף.



השאלה היא מיהו הפתרון שמשקף את סיכויי ההכחדות. נראה שזהו הפתרון הקטן מ 1.
יהי a הפתרון שקטן מ 1. מתקיים $g(a)=a$ וגם לגבי כל הרכבה n-ית מתקיים $g^{(n)}(a)=a$.
מתקיים $P(X_n=0)=g^{(n)}(0)$. אבל עבור כל n מתקיים $g^{(n)}(0)\le g^{(n)}(a)=a$. לכן גם $\lim_{n\to\infty} g^{(n)}(0)\le a$ ונקבל שהסתברות ההכחדות היא הפתרון הקטן בקטע $0<t\le 1$.

<u>שאלה</u>

נתון תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים מקיימת:

$$P(Z=0)=P(Z=1)=P(Z=2)=\frac{1}{3}$$

מהי ההסתברות להכחדות בהינתן $(X_0=1)$?

<u>תשובה</u>

מכיון שתוחלת מספר הצאצאים של פרט שווה ל 1 והתפלגות מספר הצאצאים היא לא מנוונת אז ההכחדות היא ודאית.

<u>שאלה</u>

נתון תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים מקיימת:

$$P(Z=0)=P(Z=1)=0.25 \quad , \quad P(Z=2)=0.5$$

מהי ההסתברות להכחדות בהינתן $(X_0=1)$?

<u>תשובה</u>

כאן תוחלת מספר הצאצאים היא גדולה מ 1. לכן מבוקש פתרון שהוא קטן מ 1 למשוואה

$$t=0.25+0.25t+0.5t^2$$

מתקבל פתרון יחיד נוסף שהוא $t=0.5$. לכן זאת היא ההסתברות להכחדות.

<u>שאלה</u>

נניח שבתהליך זה $(X_0=3)$. מהי ההסתברות להכחדות ?

ואם $(X_2=3)$, מהי ההסתברות להכחדות ?

<u>תשובה</u>

בהינתן $(X_0=3)$ הסתברות ההכחדות היא t^3 כי שלוש שושלות צריכות להכחד ואין תלות בינהן.
בגלל ההומוגניות בזמן זאת גם ההסתברות להכחדות בהינתן $(X_2=3)$.

<u>שאלה</u>

בתהליך זה, מהו $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2)$?

<u>תשובה</u>

מצב 2 הוא לא מצב ארגודי לכן יש לו הסתברות סטציונרית 0 לכן הגבול הוא 0.

<u>שאלה</u>

מהו $\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} > X_n)$?

<u>תשובה</u>

הסתברות זו שווה להסתברות של המשלים להכחדות. אם תהיה הכחדות אז לאחריה יתקיים תמיד $X_{n+1} = X_n = 0$. אם לא תהיה הכחדות אז בגלל שכל המצבים הם חולפים אז נגיע למספר גדול של פרטים. מכיון שתוחלת מספר הצאצאים של כל פרט גדולה מ 1 אז לפי למשל החוק החלש של המספרים הגדולים, ההסתברות שמספר הצאצאים יעלה על מספר הפרטים שבאותו דור שואפת ל 1 כאשר $n \to \infty$.

<u>טענה</u>

אם תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא μ ומתקיים $X_0 = 1$ אז תוחלת מספר הפרטים בדור ה-n היא μ^n.

<u>הוכחה</u>

באינדוקציה $E(X_n) = E(E(X_n \mid X_{n-1})) = E(\mu X_{n-1}) = \cdots$

<u>הערה</u>

מטענה זו ומאי שיוויון מרקוב יכולנו לקבל את התוצאה שכאשר $\mu < 1$ יש הכחדות ודאית.

אבל קבלנו את טענה זו בדרך אחרת.

בהוכחות של שתי הטענות הבאות נשתמש בנוסחאת פרוק השונות שאומרת שלגבי זוג משתנים מקריים X, Y מתקיים

$$Var(Y) = Var(E(Y \mid X)) + E(Var(Y \mid X))$$

<u>טענה</u>

בתהליך הסתעפות שבו תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא $\mu = 1$ ושונות מספר הצאצאים של פרט היא σ^2 אז כאשר מתקיים $(X_0 = 1)$ אז מתקיים $Var(X_n) = n\sigma^2$.

<u>הוכחה</u>

נוכיח את הטענה באינדוקציה

עבור $n = 1$ מתקיים $Var(X_1) = \sigma^2$.

עבור $n \geq 2$ מתקיים

$$Var(X_n) = Var(E(X_n \mid X_{n-1})) + E(Var(X_n \mid X_{n-1})) = Var(\mu X_{n-1}) + E(\sigma^2 X_{n-1}) =$$
$$= Var(X_{n-1}) + \sigma^2 = (n-1)\sigma^2 + \sigma^2 = n\sigma^2$$

<u>טענה</u>

בתהליך הסתעפות שבו תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא $\mu \neq 1$ ושונות מספר הצאצאים של פרט היא σ^2 אז כאשר מתקיים $(X_0 = 1)$ אז מתקיים $Var(X_n) = \sigma^2 \frac{\mu^{2n-1} - \mu^{n-1}}{\mu - 1}$.

גם את הטענה הזאת נוכיח באינדוקציה.

עבור $n = 1$ מתקיים $Var(X_1) = \sigma^2 \frac{\mu^{2-1} - \mu^{1-1}}{\mu - 1} = \sigma^2$.

עבור $n \ge 2$ מתקיים

$$Var(X_n) = Var(E(X_n \mid X_{n-1})) + E(Var(X_n \mid X_{n-1})) = Var(\mu X_{n-1}) + E(\sigma^2 X_{n-1}) =$$

$$= \mu^2 Var(X_{n-1}) + \sigma^2 E(X_{n-1}) = \mu^2 \sigma^2 \frac{\mu^{2n-3} - \mu^{n-2}}{\mu - 1} + \sigma^2 \mu^{n-1} = \sigma^2 \frac{\mu^{2n-1} - \mu^{n-1}}{\mu - 1}$$

<u>שאלה</u>

כאשר $\mu > 1$ ו $\sigma^2 > 0$, למה ישאף $Var(X_n)$ כאשר $n \to \infty$?

<u>תשובה</u>

מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sigma^2 \frac{\mu^{2n-1} - \mu^{n-1}}{\mu - 1} = \infty$.

נתן גם הסבר לתוצאה זו. כאשר התהליך לא מנוון ו $\mu > 1$ אז בהסתברות חיובית יש הכחדות ובהסתברות חיובית גודל האוכלוסיה שואף לאינסוף. מכאן נובע הפיזור הגדול בגדלי האוכלוסיה.

<u>שאלה</u>

נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם שני תהליכי הסתעפות בלתי תלויים ושווי התפלגות בהם מספר הצאצאים Z של פרט בודד מפולג לפי

$P(Z=0) = 0.001 \quad P(Z=1) = 0.998 \quad P(Z=100) = 0.001$.

<u>א</u>. בהינתן $X_0 = 1$, מצאו בקירוב את ההסתברות להיכחדות של התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$.

<u>ב</u>. נניח ש $X_0 = Y_0 = 3$, מהי בקירוב ההסתברות ששתי השושלות יכחדו לראשונה בדיוק באותו דור ?

<u>תשובה</u>

<u>א</u>. תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא גדולה מ 1, לכן יש סיכוי קטן מ 1 להכחדות.
מתחילים עם פרט בודד. נסתכל על הדור הראשון שבו יהיו מספר פרטים שונה מ 1. אם זה יהיה 0 פרטים אז יש הכחדות. אם בדור זה יהיו 100 צאצאים אז יהיו לנו בהמשך 100 שושלות בלתי תלויות שלגבי כל אחת מהן יש סיכוי לא קטן שהיא לא תכחד. במקרה זה ההסתברות להכחדות של כל 100 השושלות היא בקירוב 0 ובסך הכל ההסתברות להכחדות היא בקירוב 0.5 .
אפשר גם להבחין בכך שיש פתרון למשוואה $g(t) = t$ בין 0.5 ללמשל 0.51 .

$$g(0.5) = 0.001 + 0.998 \cdot 0.5 + 0.001 \cdot 0.5^{100} > 0.5$$

ו $g(0.51) = 0.001 + 0.998 \cdot 0.51 + 0.001 \cdot 0.51^{100} < 0.51$.

לכן בקטע שבין 0.5 ל 0.51 יש נקודה t שבה $g(t) = t$. ניתן היה לבחור קטע קצר יותר.

<u>ב</u>. בכל דור מסוים ההסתברות ששושלת Y תכחד היא קטנה מאוד. לכן ההסתברות ששושלת Y תכחד דוקא בדור ששושלת X תכחד היא קטנה מאוד.
נראה שההסתברות אינה גדולה מ 0.001 .
כדי ששתי השושלות יכחדו באותו דור, הן צריכות שתיהן לא להכחד עד אותו דור ואז כאשר אחת נכחדת צריכה גם השניה להכחד. אבל השניה תכחד בדור מסוים בסיכוי שלא עולה על 0.001 שזאת ההסתברות שלפרט אחד יהיו אפס צאצאים.
ניתן לקבל אף חסמים טובים יותר אבל החסם הזה הוא מספק.
<u>הערה</u>: חסם פחות טוב הוא $0.51^3 \cdot 0.51^3$ שזהו חסם עליון להכחדות של כולם ולא משנה באיזה דור.