מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 9

שלומי

נושא תורים

נתונה מערכת תור בה יש שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. אם בתחילת תקופה נמצא לפחות לקוח אחד בתחנה אז השרת משרת לקוח. התפלגות מספר המגיעים לתחנה בתקופה מסוימת מקיימת עבור כל שלם $k \geq 0$: $P(Z=k)=a_k$. נניח שהתהליך איננו דטרמיניסטי זאת אומרת שהתפלגות מספר הלקוחות המגיעים בתקופה אינה מנוונת.

טענה

מצב 0 הוא נשנה אם תוחלת מספר הלקוחות המגיעים בתקופה אינה גדולה מ 1.

נימוק

נעשה רדוקציה לתהליך הסתעפות כאשר מספר הצאצאים הוא מספר הלקוחות המגיעים בזמן שירות של לקוח. הדור ה- n יהיה דור הפרטים שיגיעו בזמן שבני הדור ה- $n-1$ ישורת. כך הדור הראשון הוא הדור שמגיע כאשר עדיין בתחנה לא היה כל שירות בלקוח. הדור השני הוא הדור שמגיע בזמן שבני דור זה שורתו. נסתכל על הגעה למצב 0 (של 0 צרכנים במערכת) כעל הכחדות.

כעת נשאלת השאלה מתי השרשרת נשנית חיובית ומתי היא נשנית אפס.

מטריצת המעבר היא

$$
\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & &
\end{array}
$$

לכן לא משנה לגבי ההמשך אם מתחילים במצב 0 או במצב 1. לכן $E_{0,0}=E_{1,0}$ כאשר $E_{i,j}$ היא תוחלת זמן ההגעה הראשונה ממצב i למצב j .

נשים לב ש

$$E_{k,0}=E_{k,k-1}+E_{k-1,k-2}+\cdots+E_{1,0}$$

כל הגורמים באגף ימין הם שווים לכן $E_{k,0}=kE_{1,0}$.

מתקיים

$$E_{0,0}=1+\sum_{k=1}^{\infty}P(Z=k)E_{k,0} \quad \text{או} \quad E_{0,0}=1+\sum P(Z=k)kE_{0,0}$$

לכן כאשר μ היא תוחלת מספר הלקוחות המגיעים ביחידת זמן אז $E_{0,0}=1+\mu E_{0,0}$ ומתקיים $E_{0,0}=\frac{1}{1-\mu}$. לכן תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא סופית אם ורק אם $\mu<1$. במקרה זה יש לנו נוסחא לחישוב ההסתברות הסטציונרית של מצב 0 שהיא $\pi_0=1-\mu$. זו תוצאה אינטואיטיבית כי בזמן t ארוך נצפה שיגיעו לתחנה μt לקוחות. אם הוא מתגבר על זרם הלקוחות אז נצפה שהוא ישרת לקוחות בפרופורצית זמן μ .

ניתן לשלב דרכים לחישוב הסתברויות סטציונריות. לאחר שידוע π_0, ניתן לחלץ את π_1 כי רק ממצב 1 ניתן להגיע ישירות למצב 0. כך הלאה ניתן לחשב הסתברויות סטציונריות של מצבים.

סוגיה

מבצעים סדרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות של קוביה. יהי S_n הסכום המצטבר של ההטלות. מהי בקירוב ההסתברות ש S_n יקבל באיזשהו שלב את הערך $1000+i$ עבור $0 \le i \le 5$ אך לא יקבל בשום שלב שום ערך $1000+j$ עבור j שהוא מספר אי שלילי שקטן מ i.

פתרון

נגדיר מצב בשישיה כ i הראשון באותה שישיה שבו נבקר. כל המידע לגבי שישיה נמצא בשישיה הקודמת לה שחופפת לה ב 5 מתוך 6 המקומות. מטריצת המעבר של השרשרת היא:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם למשל בשישיה שמתחילה ב 100 הראשון שבו מבקרים הוא 102 אז ברור ש 102 הוא גם הראשון שבו מבקרים בשישיה שמתחילה ב 101. בשישיה שמתחילה ב 100 הוא המספר השלישי ובשישיה שמתחילה ב 101 הוא השני. כך ממצב 3 בהכרח עוברים למצב 2. אם בשישיה שמתחילה ב 100 הראשון שבו מבקרים הוא 100 אז לא יודע מי הוא הראשון שבו מבקרים בשישיה שמתחילה ב 101. במקרה זה הכל תלוי בתוצאת הקוביה המוטלת כאשר מבקרים ב 100 . כך מהמצב הראשון שבשרשרת אפשר לעבור לכל אחד מהמצבים האחרים בסיכוי $\frac{1}{6}$.

השרשרת היא בלתי פריקה: מכל מצב יש מסלול למצב הראשון וממנו יש מעבר ישיר לכל מצב אחר. כאשר נמצאים במצב 1 אז על-ידי קבלת התוצאה 1 נשארים באותו מצב, לכן מצב 1 הוא לא מחזורי מכיון שאי מחזוריות היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם לא מחזוריים. לכן יש הסתברויות גבוליות ששוות להסתברויות הסטציונריות.

נמצא וקטור הסתברויות סטציונריות :

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_4 \\ \pi_4 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_5 \\ \pi_5 = \frac{1}{6}\pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

מקבלים $\pi_i = \frac{6-i}{6}\pi_0$ ו $\pi_0 = \frac{1}{3.5}$. זה סביר כי התוחלת של כל הטלה היא 3.5 .

<u>שאלה</u>

מהי בקירוב ההסתברות שנבקר ב 1002 וב 1004 אך לא נבקר ב 1003 , 1001 , 1000 ?

<u>פתרון</u>

עד שלב 1000 יש מספר גדול של מעברים, לכן ההסתברות קרובה להסתברות הסטציונרית.
הביקור הראשון החל ממקום 1000 צריך להיות ב 1002 ולכך יש הסתברות מקורבת של $\frac{1}{3.5}\cdot\frac{4}{6}$. משם צריך לעשות צעד של 2. בסך הכל ההסתברות המקורבת היא $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3.5}\cdot\frac{4}{6}$.

<u>שרשרות מרקוב בזמן רציף</u>

נתחיל את העיסוק בשרשרות בזמן רציף, בטיפול במקרה פרטי שלהם שהוא תהליך פואסון.

<u>נושא</u>: <u>תהליך פואסון</u>

תהליך פואסון $\{X(t)\}$ סופר את מספר ההתרחשויות עד נקודות זמן שונות $t \ge 0$.
$X(t)$ סופר את מספר ההתרחשויות בקטע הזמן $[0,t]$.
לתהליך פואסון יש פרמטר יחיד $\lambda > 0$ ומצביו הם כל השלמים האי שליליים.
כתהליך שמונה התרחשויות, באופן טבעי $X(t)$ לא יכול לרדת עם התקדמות הזמן.
מתקיימות ההנחות הבאות:

<u>א</u>. $X(0)=0$
(באופן טבעי מתחילים עם 0 התרחשויות בזמן 0).

<u>ב</u>. $P[X(t+h)=n \mid X(t)=n] = 1-\lambda h + o(h)$
(כאשר $o(h)$ מסמן גודל המקיים שכאשר $h \to 0$, הוא שואף לאפס יותר מהר מכל ch עבור כל $c > 0$. זאת אומרת שכאשר $h \to 0$, הסיכוי שתהיה התרחשות ושיחול שינוי ב X מתנהג כמו λh).

<u>ג</u>. $P[X(t+h)=n+1 \mid X(t)=n] = \lambda h + o(h)$

<u>ד</u>. $P[X(t+h)>n+1 \mid X(t)=n] = o(h)$
(זאת אומרת שבפרק זמן $h \to 0$, ההסתברות שיהיו יותר מהתרחשות אחת שואפת לאפס יותר מהר מכל פונקציה לינארית של h).

<u>ה</u>. עבור כל סדרת זמנים $t_1 < s_1 \le t_2 < s_2 \cdots \le t_n < s_n$ המשתנים המקריים $\{X(s_i)-X(t_i)\}$ הם ב"ת (זאת אומרת שיש אי תלות בין גדלי הקפיצות של התהליך בפרקי זמן זרים).

<u>משפט</u>

אם $\{X(t)\}$ הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ, אז התפלגות $X(t)$ היא פואסונית עם פרמטר λt .
כלומר: $P[X(t)=k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$ עבור כל $k = 0,1,2,\cdots$.

<u>הוכחה</u>

נחלק את הרווח $[0,t]$ ל n רווחים שווים. הקטע ה- i יהיה $\left[\frac{i-1}{n}t, \frac{it}{n}\right)$ עבור $i = 1,\cdots,n$.

נראה שכאשר $n \to \infty$, ההסתברות שיהיה קטע שבו יהיה יותר מהתרחשות אחת באיזשהו קטע, שואפת לאפס.

יהיו E_i המאורעות שבקטע ה-i יהיה יותר מהתרחשות אחת.

יהי $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ (זהו המאורע שלפחות בקטע אחד תהיה יותר מהתרחשות אחת).

הסתברות איחוד אף פעם לא גדולה מסכום ההסתברויות ולכן נקבל:

$$P(E) \le \sum_{i=1}^{n} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} o\left(\frac{t}{n}\right) = no\left(\frac{t}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כעת בהנחה שבאף קטע חלקי של הקטע $[0,t]$ לא יתרחשו יותר מאירוע אחד, נחשב את ההסתברות שבקטע $[0,t]$ יתרחשו k התרחשויות, זאת אומרת שבבדיוק k קטעים תתרחש התרחשות אחת.

$$\binom{n}{k}\left(\lambda\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k \left(1-\lambda\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k} =$$

$$= \left(\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)\left(\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k + o\left(\frac{1}{n^k}\right)\right)\left(\frac{\left(1-\lambda\frac{t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n}{\left(1-\lambda\frac{t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k}\right)$$

$$\to \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

הסברים:

בפיתוח בינומיאלי של $\left(\lambda\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k$ המחובר הראשון הוא $\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k$ וביתר k המחוברים האחרים $\frac{1}{n}$ מופיע בחזקה גבוהה מ k.

כאשר k הוא קבוע מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1$ ו $\lim_{n\to\infty}\left(1-\lambda\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k = 1$.

לאחר שהוכחנו שמספר האירועים עד זמן t מתפלג פואסונית, נוכל לשים לב לכך שאם τ_1 הוא זמן ההתרחשות הראשונה, אז $P[\tau_1 > t] = P[X(t) = 0] = e^{-\lambda t}$, כלומר τ_1 הוא משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר λ. זה מקרב אותנו לבניה של תהליך פואסון.

<u>בניית תהליך פואסון</u>

נספור את מספר ההתרחשויות החל מזמן 0 ועד נקודות הזמן השונות t, לאחר כל התרחשות ממתינים זמן המתפלג $\exp(\lambda)$ עד ההתרחשות הבאה. המשתנים המייצגים את משך הזמן בין התרחשות להתרחשות הם ב"ת.

נבדוק שמתקיימות כל חמשת ההנחות של תהליך פואסון:

<u>א</u>. עד זמן 0 אין אף התרחשות.

<u>ב</u>. לגבי משתנה $Y \sim \exp(\lambda)$ מתקיימת תכונת חוסר הזכרון:

$$P[Y > t + r \mid Y > t] = P[Y > r] = e^{-\lambda r}$$

לכן נקבל כאן $P[X(t+h) = n \mid X(t) = n] = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$

(המעבר האחרון יכול להתקבל לפי פיתוח טיילור).

ד. כדי שבקטע באורך h יתרחשו לפחות שני אירועים, צריך שקודם כל יתרחש אירוע אחד לפחות. לכך יש הסתברות $1-e^{-\lambda h}$. אם מתרחש אירוע, אז הוא מתקיים בנקודה בין 0 ל h. לאחר התרחשות זו, צריך התרחשות נוספת במה שנותר מהקטע שהוא באורך של לא יותר מ h. לכן נקבל

$$P[X(t+h)>n+1 \mid X(t)=n] \le \left(1-e^{-\lambda h}\right)\left(1-e^{-\lambda h}\right)=(\lambda h+o(h))^2=o(h)$$

ג. מתקיים $P[X(t+h)\ge n+1 \mid X(t)=n]=1-e^{-\lambda h}=\lambda h+o(h)$

בצירוף עם התוצאה של ד' נקבל $P[X(t+h)=n+1 \mid X(t)=n]=\lambda h+o(h)$

(ההסתברות ללפחות אירוע אחד היא $\lambda h+o(h)$ וההסתברות ליותר מאירוע אחד היא $o(h)$, לכן ההסתברות לבדיוק אירוע אחד היא $\lambda h+o(h)$).

ה. התכונה נובעת מחוסר זכרון של התפלגות מעריכית.

<u>שאלה</u>

נמקו רק בהסתמך על ההנחות של תהליך פואסון והקשרים שלו להתפלגות מעריכית, מדוע סכום של שני משתנים מקריים מעריכיים אינו מתפלג מעריכית.

<u>הערה</u>: ניתן לחשב את צפיפות הסכום ואת התפלגותו בשיטות רגילות של חישוב התפלגות סכום. אבל, זה לא מה שאני רוצה שתעשו כאן.

<u>תשובה</u>

בתהליך פואסון, ההסתברות לאירוע בקטע זמן באורך h היא בסדר גודל של h. כך בהתפלגות מעריכית, ההסתברות לקבל ערך קטן מ h היא בסדר גודל של h. כדי שסכום שני משתנים יקבל ערך קטן מ h, צריך כל אחד מהם לקבל ערך קטן מ h. בגלל האי תלות יש לזה הסתברות שהיא בסדר גודל של h^2. זו לא הסתברות לקפיצה בתהליך פואסון ולכן היא לא מתאימה להתפלגות מעריכית.

<u>המודל הכללי של שרשרות בזמן רציף</u>

ראינו שבתהליך פואסון, בכל מצב טבעי ממתינים זמן המתפלג מעריכית (אותו פרמטר מעריכי לכל מצב) ואז עוברים לטבעי הבא. שרשרת מרקוב בזמן רציף היא מקרה כללי יותר. בכל מצב ממתינים זמן מעריכי ואז עוזבים אותו. אבל, לכל מצב יכול להיות פרמטר אחר להתפלגות המעריכית. כמו כן יכולים לעבור למצבים שונים.

כאשר נמצאים במצב i עוברים למצב j בקטע זמן באורך h בהסתברות $\lambda_{i,j}h+o(h)$ ונשארים במצב i לאחר קטע זמן באורך h בהסתברות $1-\sum_j\left(\lambda_{i,j}h+o(h)\right)$.