<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים</u>

<u>משפט גבול – גישה אלטרנטיבית</u>

שלומי

<u>המטרה</u> הבאה שלנו היא להוכיח שבשרשרת סופית שהיא בלתי פריקה ובלתי מחזורית, קיימת עבור מצב i ההסתברות הגבולית $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)}$ ושהיא שווה ל $\frac{1}{E_i}$, כאשר E_i היא תוחלת זמן החזרה ממצב i לעצמו. לשם כך נצטרך להוכיח מספר טענות.

לפני שניגש להוכחה, ניתן <u>דוגמא</u> לשימוש במשפט.
נתונה שרשרת מרקוב על קבוצת המצבים $\{1,2\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

זו שרשרת סופית בלתי פריקה. היא גם לא מחזורית (ניתן לשהות במצב 1 שני צעדים רצופים, לכן המחזור שלו הוא 1, אי מחזוריות היא תכונה מחלקתית ולכן זו שרשרת לא מחזורית). לכן קיים $\lim_{n\to\infty}{}_{1,1}^{(n)} = \frac{1}{E_1}$.

נחשב את E_1: בהסתברות 0.5 חוזרים למצב 1 לאחר צעד אחד. אם, לא חוזרים למצב 1 בצעד אחד, אז עוברים למצב 2 ובהכרח חוזרים למצב 1 בשני צעדים. לכן $E_1 = 0.5\cdot 1 + 0.5\cdot 2 = 1.5$.

לכן נקבל ש $\lim_{n\to\infty}{}_{1,1}^{(n)} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$.

<u>טענה</u>

יהי 1 (שם של מצב) מצב במחלקה סופית בלתי פריקה יהיו $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ משכי הזמן בין הגעה למצב 1 בפעם ה- i לבין ההגעה אליו בפעם ה- $i+1$.

על הסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ חל החוק החזק של המספרים הגדולים והשכיחות היחסית של מספר הביקורים במצב 1 שואפת ל $\frac{1}{E_1}$, כאשר E_1 היא תוחלת זמן החזרה ממצב 1 למצב 1.

<u>הסבר</u>

ראינו (בתקציר הראשון של הקורס) שבמחלקה סופית בלתי פריקה, ההסתברות לא לחזור אף פעם למצב ההתחלתי תוך n צעדים דועכת מעריכית. לכן המומנט הרביעי (כמו כל המומנטים הסופיים) של זמן החזרה הוא סופי.

<u>נפרט יותר:</u>

לפי נוסחת הזנב $E\left(X^4\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X^4 \geq n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X \geq \sqrt[4]{n}\right)$

החל מאיזשהו מקום סופי אברי הטור הזה לא גדולים מאברי הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} (1-a)^{\left\lfloor \frac{\sqrt[4]{n}}{M} \right\rfloor}$ (סכום על $(1-a)$ בחזקת $\left\lfloor \frac{\sqrt[4]{n}}{M} \right\rfloor$ עבור איזשהו $0<a<1$ שגדול או שווה מההסתברות לחזור למצב 1 מכל מצב תוך לא יותר מ M צעדים מכל מצב).

<u>הסבר אפשרי להתכנסות הטור</u>

מכיון שהטור $\sum (1-a)^{-2\ln_{1-a} n} = \sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס אז גם הטור שלנו מתכנס כי $\left\lfloor \frac{\sqrt[4]{n}}{M} \right\rfloor$ גדל מהר יותר מ $-2\ln_{1-a} n$.

זמני החזרה לאחר הביקור הם משתנים מקריים שווי התפלגות בלתי תלויים בעלי מומנט רביעי סופי. לכן על סדרת זמני החזרה חל החוק החזק של המספרים הגדולים.

ממוצע זמני החזרה ישאף לתוחלת זמן החזרה שהיא E_1 .

נסתכל על זמני ההגעה למצב בפעמים השונות. נגדיר את t_n להיות זמן החזרה ה- n. עבור כל $\varepsilon > 0$ רק מספר סופי של פעמים יצאו ערכי t_n מהתחום שבין $(1-\varepsilon)nE_1$ ל $(1+\varepsilon)nE_1$. לכן השכיחות היחסית של הביקורים בנקודות הזמן האלה שואפת ל $\frac{1}{E_1}$.

נרצה להראות שגם בזמנים שבהם איננו מבקרים במצב ההתחלתי, היחס בין מספר הביקורים למספר הצעדים המצטבר שואף ל $\frac{1}{E_1}$.

כל נקודת זמן נמצאת בין שני ביקורים עוקבים. עבור כל $\varepsilon > 0$, בזמנים שהם בין הביקור ה- n לביקור ה- $n+1$ חוץ ממספר סופי של ערכי n, מספר הצעדים הכולל יהיה בין $(1-\varepsilon)nE_1$ ל $(1+\varepsilon)(n+1)E_1$. לכן היחס בין מספר הצעדים הכולל לבין מספר הביקורים במצב ההתחלתי יהיה בין $\frac{(1-\varepsilon)nE_1}{n}$ ל $\frac{(1+\varepsilon)(n+1)E_1}{n}$. לפי עקרון הסנדוויץ היחס שואף ל E_1. לכן בכל נקודות הזמן, השכיחות היחסית של מספר הביקורים שואפת ל $\frac{1}{E_1}$.

<u>טענה</u>

אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(n)}$ אז הוא שווה לשכיחות הגבולית של מצב 1.

<u>הסבר</u>

אם קיים הגבול אז לגבי כל סביבה של גבול זה קיים N כך שעבור כל $n > N$ ההסתברות שלאחר n צעדים נהיה במצב 1 היא בסביבה זו. כאשר מסתכלים על נקודות זמן ששואפות לאינסוף, אז ההשפעה של מה שקורה עד נקודת זמן קבועה דועכת.

אם קיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(n)} = p$, אז עבור n גדול, תוחלת מספר הביקורים במצב i מתנהגת כמו np. אך אם השכיחות היחסית היא בהסתברות 1 , $\frac{1}{E_i}$, אז תוחלת מספר הביקורים חייבת להתנהג כ $\frac{n}{E_i}$.

לפי טענה זו, אם יש גבול $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(n)}$ אז הוא בהכרח שווה ל $\frac{1}{E_1}$.

אבל לא בכל שרשרת סופית ובלתי פריקה קיים הגבול. דוגמא לשרשרת שבה לא קיים הגבול היא השרשרת בעלת מטריצת המעבר:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

בעזרת הטענות הבאות נראה שבמחלקה בלתי פריקה סופית ובלתי מחזורית הגבול הזה קיים.

<u>טענה</u>

תהי P מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב סופית, בלתי פריקה ובלתי מחזורית.

קיים N סופי, כך שעבור כל $n > N$ אברי המטריצה P^n הם חיובים ממש.

הוכחה

כפי שראינו בתקציר הראשון, במחלקה סופית ובלתי פריקה ניתן להגיע מכל מצב לכל מצב אחר בלא יותר מ M צעדים. מכיון שכל המצבים הם לא מחזוריים אז עבור כל מצב j ניתן לחזור ממנו לעצמו תוך n צעדים בדיוק עבור כל $n > a_j$, כאשר לכל מצב j יש איזשהו קבוע a_j. נבחר $a = \max_j \{a_j\}$. עבור כל $n \geq M + a$ כל אברי המטריצה P^n הם חיובים ממש (ניתן להגיע מכל מצב לכל מצב ולעשות לולאות בכל גודל נדרש).

טענה

נתונות שתי שרשרת מרקוב סופיות $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ב"ת שלשתיהן קיים אותו מרחב מצבים ואותה מטריצת מעבר בלתי פריקה ובלתי מחזורית.

עבור כל זוג מצבים התחלתיים של שני התהליכים ועבור כל מצב, קיים בהסתברות 1 , n סופי כך ש $X_n = Y_n$.

נוכיח את הטענה בעזרת שתי הטענות הבאות

נסתכל על תהליך סטוכסטי בעל מרחב מצבים שהוא הזוגות הסדורים (X_n, Y_n).

טענה 1: תהליך זה הוא שרשרת מרקוב.

הסבר:

בכל אחת מהשרשרות, כל האינפורמציה נמצאת בערך של השלב האחרון וכמו כן אין חשיבות לזהות התקופה.

טענה 2: זו היא שרשרת מרקוב בלתי פריקה, נשנית ולא מחזורית.

הסבר:

השרשרות המקוריות הן לא מחזוריות.

לכן קיים N כך שעבור כל $n > N$ יש לכל אחת משתי השרשרות המקוריות, הסתברות חיובית להיות בכל מצב עבור כל מצב התחלתי. לכן מכיון שהשרשרות ב"ת אז הן יכולות לאחר כל $n > N$ צעדים לקבל כל צירוף של מצבים. לכן השרשרת שהגדרנו היא בלתי פריקה וגם לא מחזורית.

שרשרת סופית ובלתי פריקה מקבלת באיזשהו שלב את כל אחד ממצביה. לכן גם המצבים $(1,1)$ או כל (i,i) יתקבלו בהכרח באיזשהו שלב.

נרצה להראות שבמחלקה בלתי פריקה סופית ולא מחזורית מתקיים $\lim_{n\to\infty} \left| P_{i,k}^{(n)} - P_{j,k}^{(n)} \right| = 0$ עבור כל מצב k נתון וכל זוג מצבים i, j.

נסתכל שוב על התהליך שמקבל את הערכים (X_n, Y_n). כפי שהראנו זו שרשרת מרקוב בלתי פריקה ובלתי מחזורית. נסתכל על מצב שרירותי (l,l) בשרשרת זו. נקרא למצב זה מצב 1. עבור מצב אחר שהוא זוג סדור בשרשרות המקוריות שנקרא לו 2 . עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים M סופי כך ש $\sum_{r=1}^{M} f_{2,1}^{(r)} \geq 1 - \varepsilon$. נסתכל על n המקיים $n \geq M$. אם שני התהליכים מתלכדים באיזשהו שלב מסוים לראשונה לפני השלב ה- M אז בהינתן מאורע זה, התוחלת המותנה של $\left| P_{i,k}^{(n)} - P_{j,k}^{(n)} \right|$ היא שווה בדיוק לאפס. מכיון שהתלכדות כזאת מתקיימת בהסתברות של לפחות $1-\varepsilon$ ואם היא לא מתקיימת בשום שלב אז הפרש ההסתברויות הוא לכל היותר 1, אז הפרש ההסתברויות אינו יותר מ ε.

מכיון שכאשר $n \to \infty$ נעלמת ההשפעה של המצב ההתחלתי אז יש שאיפה להסתברות גבולית.

כפי שנאמר קודם, הסתברות גבולית יכולה להיות שווה רק לשכיחות היחסית הגבולית שהיא כאמור שווה ל $\frac{1}{E_k}$ עבור מצב k שתוחלת החזרה ממנו אל עצמו היא E_k.

מועד א' סמסטר ב' תשפ"א
24.06.21

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. אסור השימוש במחשבי כיס.
בחמש השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N,100\}$.
נמקו את תשובותיכם !
בסעיפים בהם אתם טוענים שמשהו יתכן, יש להביא דוגמא מנומקת שמראה שהדבר יתכן.

בהצלחה !

שאלה 1 (9 נקודות)
תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על הישר שבו בכל שלב עושים צעד ימינה בסיכוי 0.2 וצעד שמאלה בסיכוי 0.8 .
מהי תוחלת מספר הצעדים עד להגעה למצב 0 כאשר מתחילים במצב 2 ?

פתרון 1
יהי $e_{k,0}$ – תוחלת זמן ההגעה ממצב k למצב 0.
כשנמצאים במצב 1 עושים צעד ואז בסיכוי 0.8 כבר מגיעים למצב 0 ובסיכוי 0.2 עוברים למצב 2.
לכן מתקיים $e_{1,0} = 1 + 0.8 \cdot 0 + 0.2e_{2,0}$. כשנמצאים במצב 2 צריך לפני שמגיעים למצב 0 להגיע למצב 1 ואז להגיע ממצב 1 למצב 0 . לכן $e_{2,0} = e_{2,1} + e_{1,0}$. מכיון ש $e_{2,1} = e_{1,0}$ אז מתקיים $e_{2,0} = 2e_{1,0}$. לכן מתקיים $e_{1,0} = 1 + 0.4e_{1,0}$. לכן מתקיים $e_{1,0} = \frac{5}{3}$ ו $e_{2,0} = \frac{10}{3}$.

שאלה 2 (18 נקודות)

א. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
בשרשרת מרקוב בת שני מצבים כל וקטור סטציונרי מקיים את תנאי האיזון המפורט.

ב. מהו המספר המינימלי של מצבים שצריכים להיות בשרשרת מרקוב בזמן בדיד כדי שיהיו בה גם אין סוף וקטורים סטציונרים שמקיימים את תנאי האיזון המפורט וגם יהיו בה אין סוף וקטורים סטציונרים שלא מקיימים את תנאי האיזון המפורט ?

פתרון 2

א. בשרשרת בת שני מצבים שכיחות המעברים מהמצב הראשון לשני שווה לשכיחות המעברים מהמצב השני למצב הראשון. לכן לגבי כל וקטור סטציונרי חל תנאי האיזון המפורט.

הערה

אם המצבים לא מקושרים אז שכיחות המעברים בין מצבים שונים היא אפס והתנאי מתקיים.

ב. יש לפחות 5 מצבים.

בכל מחלקה בלתי פריקה יש וקטור סטציונרי יחיד. כל קומבינציה של וקטורים סטציונרים של מחלקות שונות היא וקטור סטציונרי. אם בכל אחת מהמחלקות הוקטורים הסטציונרים מקיימים את תנאי האיזון המפורט, אז גם הקומבינציות שלהם מקיימת את תנאי האיזון המפורט. אם באחת מכמה מחלקות יש וקטור שלא מקיים את תנאי האיזון המפורט אז יש אין סוף קומבינציות שלא מקיימות את תנאי האיזון המפורט. לכן כדי שיתקימו תנאי שאלה זו, צריך שיהיו לפחות זוג מחלקות שבהן כל וקטור מקיים את תנאי האיזון המפורט ולפחות מחלקה אחת שבה וקטור שלא מקיים את תנאי האיזון המפורט. שתי המחלקות שמקיימות את התנאי יכולות להחיל מצב בודד כל אחת. המחלקה שלא מקיימת את התנאי צריכה לפי סעיף א' לכלול יותר משני מצבים. היא יכולה להחיל שלושה מצבים (למשל מחלקה בת מחזור 3). לכן בסך הכל צריכים להיות לפחות $3+1+1$ מצבים.

שאלה 3 (27 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה שקבוצת מצביה היא של כל השלמים האי שליליים.

א. האם יתכן שמתקיים $P_{i,0} > 0$ לכל $i > 0$ ו 0 מצב חולף ?

ב. האם יתכן שמתקיים $\sum_{i=0}^{\infty} P_{i,0} < 0.5$ ו 0 מצב נשנה חיובי ?

ג. האם יתכן שמתקיים $\sum_{i=0}^{\infty} P_{i,0} < 0.5$ ו 0 מצב נשנה אפס ?

פתרון 3

א. זה יתכן. נניח שמתקיים עבור כל $i \geq 0$: $P_{i,0} = 0.1^{i+1} = 1 - P_{i,i+1}$. במקרה זה ההסתברות לחזור למצב 0 ב i צעדים היא לא גדולה מ 0.1^{i+1} וההסתברות לחזור אי פעם קטנה מ $\sum_{i=0}^{\infty} 0.1^{i+1} < 1$. לכן מצב 0 הוא חולף.

הערה

השימוש בלמה של בורל קנטלי אינו מתאים. ממצב מסוים יכולה להיות יותר מהזדמנות אחת לחזור למצב 0 . אם ממצב מסוים עוברים למצב 0 ישירות בהסתברות 1 אז מצב 0 יכול להיות נשנה גם אם סכום הטור של הסתברויות המעבר למצב 0 הוא סופי. ראו גם דוגמא בסעיף ב' למקרה שסכום הטור הוא סופי אך חוזרים בודאות למצב 0 .

ב. זה יתכן. נניח שמתקיים עבור כל $i \geq 2$: $P_{i,1} = 0.5 = P_{i,i+1}$ ומתקיים $P_{1,0} = 0.4 = 1 - P_{1,2}$. במקרה זה היכן שלא נמצאים יש הסתברות של לפחות $0.5 \cdot 0.4$ להגיע למצב 0 תוך שני צעדים. כך תוחלת מספר זוגות הצעדים וגם תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא סופית.

ג. זה יתכן. נניח שממצב 0 עוברים בהכרח למצב 1 , ממצב 1 עושים צעד שמאלה בסיכוי 0.4 וצעד ימינה בסיכוי 0.6 ומיתר המצבים הולכים בסיכוי שווה ימינה ושמאלה. כך ממצב 0 בודאות חוזרים למצב 1 ומכל מצב אחר בודאות חוזרים למצב 1 (כמו שבהילוך מקרי סימטרי בודאות מגיעים לכל מצב). לכן מצב 1 הוא נשנה. אך כמו בהילוך מקרי סימטרי תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 1 היא אין סופית. לכן מצב 1 הוא נשנה אפס. כל המצבים מקושרים ולכן כולם נשנים אפס.

שאלה 4 (18 נקודות)
יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו שמתפלג המשתנה המקרי Z . נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.

א. האם יתכן שמתקיים $E(Z) < 2$ ו $0 < \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) < 0.1$?
ב. האם יתכן $\lim_{n\to\infty} P\left(n < X_n < n + \sqrt{n}\right) > 0.6$?

פתרון 4
א. זה יתכן. נניח שמתקיים $P(Z = 2) = 0.99 = 1 - P(Z = 0)$.
תוחלת מספר הצאצאים של פרט גדולה מ 1 . לכן סיכויי ההכחדות קטנים מ 1.
הפונקציה היוצרת של מספר הצאצאים היא $g(t) = 0.01 + 0.99t^2$.
מתקיים $g(0) > 0$. מתקיים $g(0.1) < 0.1$. לכן סיכויי היכחדות הם בין 0 ל 0.1 .
ב. זה לא יתכן. אם התהליך נכחד בודאות אז החל מאיזשהו שלב אין בכלל פרטים. התהליך לא נכחד בודאות רק אם תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא גדולה ממש מ 1 , זאת אומרת שהיא גדולה מ 1 באיזשהו a קבוע חיובי. אם תהיה הכחדות אז תנאי הסעיף לא יתקיימו. אחרת גודל האוכלוסיה ישאף לאין סוף. במקרה זה לפי החוק החלש ההסתברות שממוצע מספר הלידות בדור מסוים תהיה קטנה מ $1 + a/2$ תשאף לאפס. לכן אם בדור מסוים התנאי יחול אז בסיכוי קרוב ל 1 הוא לא יחול בדור הבא.

שאלה 5 (36 נקודות)
יהי $X(t)$ תהליך פואסון בעל קצב 1.

א. האם קיים תהליך סטוכסטי $Y(t)$, כך שמתקיים $X(t) = Y(t^2)$ לכל $t \geq 0$?
ב. מהי ההסתברות שיהיה מצב אי שלילי שבו נשהה פחות זמן מאשר בכל מצב אחר ?
(זאת אומרת, שהביקור בו יהיה קצר יותר מאשר כל ביקור במצב אחר).

יש לי אפשרות לצפות בתהליך במשך זמן כולל של לכל היותר דקה אחת מתוך שתי הדקות הראשונות שבהן התהליך מתרחש. מותר לי לחלק את הדקה הזאת לכל חלוקה סופית של פרקי זמן שסכומם הוא דקה אחת. בזמן שאני צופה בתהליך ורק בזמן זה אני רואה את הקפיצות של התהליך ואני רואה את ערכי התהליך. אני רואה קפיצה ממצב k למצב
$k + 1$ רק אם אני צופה בתהליך בזמן קפיצה זו. אני רואה את הערך k אם התהליך $X(t)$ מקבל את הערך הזה לפחות בחלק מהזמן שבו אני צופה בתהליך.

ג. האם קיימת חלוקה סופית של הדקה שבה אני אצפה בתהליך כך שתוחלת מספר הקפיצות של התהליך שאותם אראה, תהיה גדולה יותר מאשר בכל חלוקה סופית אחרת ?
ד. האם קיימת חלוקה סופית של הדקה שבה אני אצפה בתהליך כך שתוחלת מספר ערכי התהליך שאותם אראה, תהיה גדולה יותר מאשר בכל חלוקה סופית אחרת ?

פתרון 5

א. תהליך מתאים הוא $Y(t) = X(\sqrt{t})$. מתקיים $Y(t^2) = X(\sqrt{t^2}) = X(t)$.

הערה

כל רצף של משתנים מקריים הוא תהליך סטוכסטי בזמן רציף. התהליך $Y(t)$ שתואר אינו שרשרת מרקוב אבל הוא כן תהליך סטוכסטי.

ב. ההסתברות של מאורע זה היא אפס. נראה תחילה שההסתברות שבמצב מסוים נשהה פחות מאשר בכל מצב אחר היא אפס. מכיון שלגבי כל מצב ההסתברות היא אפס, אז ההסתברות שיהיה מצב כזה היא גם אפס (כאיחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס).

במצב מסוים שוהים זמן חיובי כלשהו. עבור כל זמן חיובי כזה, לגבי כל מצב אחר יש הסתברות חיובית קבועה (גם אם קטנה) שנשהה בו פחות. לפי הלמה של בורל קנטלי יהיו בהסתברות 1 אין סוף מצבים אחרים שבהם נשהה פחות.

הערות

עבור מצב נתון, המאורעות שבמצבים שונים אחרים נשהה פחות מאשר בו הם תלויים. לכן אי אפשר להשתמש בלמה של בורל קנטלי תוך הסתמכות על כך שבכל מצב יש סיכוי של חצי לשהות פחות מאשר במצב נתון מסוים.

לסדרה אין סופית יתכן שאין מינימום למרות שיש גבול תחתון.

ג. מכיון שקצב התקדמות התהליך הוא קבוע אז בכל חלוקה תוחלת מספר הקפיצות שנראה היא שווה. אין חלוקה שבמסגרתה התוחלת גדולה יותר מאשר בחלוקה אחרת.

ד. "נפספס" ערך מסוים אם יתרחשו יותר מקפיצה אחת בקטע שבו לא נצפה.

בכל אינטרוול זמן סופי יש הסתברות חיובית שיתרחשו יותר מקפיצה אחת. כך בכל חלוקה סופית יש הסתברות חיובית "שנפספס" איזשהו מצב. אבל כאשר נשאיף את גדלי הקטעים שבהם לא נצפה בתהליך לאפס (סדרה של חלוקות סופיות שבהן אורכי הקטעים שואפים לאפס) אז ההסתברות "שנפספס" מצב תשאף לאפס (אם החלוקה היא לקטעים באורך h אז ההסתברות שבקטע מסוים יהיה יותר מאירוע אחד היא $o(h)$ ויש סדר גודל של $\frac{1}{h}$ קטעים). לכן לגבי כל חלוקה יש חלוקות אחרות שעדיפות עליה.

מועד ב' סמסטר ב' תשפ"א
14.09.21

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. אסור השימוש במחשבי כיס.
בארבע השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N,100\}$.
נמקו את תשובותיכם !
בסעיפים בהם אתם טוענים שמשהו יתכן, יש להביא דוגמא מנומקת שמראה שהדבר יתכן.

בהצלחה !

<u>שאלה 1</u> (45 נקודות)
תהי $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים המקיימים $E(|X_i|) < \infty$.
בסעיפים א,ב,ג נניח שמתקיים עבור כל $0 \le n < \infty$ ועבור כל סדרת ערכים אפשריים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$E(X_{n+1}|X_n = a_n, X_{n-1} = a_{n-1}, \cdots, X_0 = a_0) = a_n$$

בסעיפים ד,ה נניח שמתקיים עבור כל $0 \le n < \infty$ ועבור כל סדרת ערכים אפשריים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$E(X_{n+1}|X_n = a_n, X_{n-1} = a_{n-1}, \cdots, X_0 = a_0) > a_n$$

<u>א</u>. האם יתכן שלגבי הסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ לא חלה תכונת המרקוביות ?
<u>ב</u>. האם יתכן שהסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ מקיימת את תכונת המרקוביות, אבל היא אינה שרשרת מרקוב ?
<u>ג</u>. האם יתכן שמתקיים $\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = \infty$?
<u>ד</u>. האם יתכן שהסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב נשנית אפס ?
<u>ה</u>. האם יתכן שהסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב נשנית חיובית ?

<u>פתרון 1</u>
בכל אחד מהסעיפים נתן דוגמא שתראה יתכנות.

<u>א</u>. נתן דוגמא של תהליך סוכסטי שמצביו הם כל השלמים ושמצבו ההתחלתי הוא הראשית. נניח שבכל שלב חוץ משלב 8 עושים בסיכוי שווה צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה. בשלב 8 עושים בסיכוי שווה צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה אם בשלב 2 לא היינו במצב 0 , ואם כן היינו בשלב 2 במצב 0 אז עושים בסיכוי שווה שני צעדים ימינה או שני צעדים שמאלה. כך ההסטוריה הקודמת נותנת מידע נוסף על ערכו של המשתנה התשיעי.

ב. נתן דוגמא של תהליך סטוכסטי שמצביו הם כל השלמים ושמצבו ההתחלתי הוא הראשית. נניח שבכל שלב חוץ משלב 8 עושים בסיכוי שווה צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה. בשלב 8 עושים בסיכוי שווה שני צעדים ימינה או שני צעדים שמאלה. אם ידועה התקופה אז כל המידע ניתן על ידי המשתנה הקודם האחרון. אבל המעברים תלויים בתקופה.

ג. נתן דוגמא של הילוך מקרי סימטרי על הישר. המשנה ה n חסום בערכו המוחלט על-ידי n , לכן סדרת המשתנים היא סדרת משתנים שערכם המוחלט חסום. אבל כל מצבי השרשרת הם נשנים אפס ולכן בעלי הסתברות גבולית של אפס, לכן עבור כל M סופי, ההסתברות שהערך המוחלט של המשתנים גדול ממנו, שואפת ל 1 , ולכן התוחלות שואפות לאין סוף.

ד. נתן דוגמא של שרשרת על החזקות השליליות, חיוביות ואפס של 2. בכל שלב המשתנה שווה לפעמיים המשתנה הקודם בסדרה או למחצית המשתנה הקודם בסדרה. כך התוחלת של כל משתנה בהינתן ערכו של המשתנה הקודם שווה ל $0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 0.5$ כפול ערכו של המשתנה הקודם. כל המצבים הם נשנים אפס (שינוי שמות המצבים של הילוך מקרי סימטרי).

ה. נתן דוגמא של שרשרת שקבוצת מצביה היא החזקות האי שליליות של 2. נניח שבכל שלב עוברים בסיכוי שווה למצב שערכו כפליים ערכו של המצב הקודם או למצב 1. לפי הלמה של בורל קנטלי חוזרים למצב 1 בהסתברות 1 אין סוף פעמים. השרשרת היא בלתי פריקה, ולכן כל המצבים נשנים.

<u>שאלה 2</u> (9 נקודות)

יהי $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי ש Z מתפלג, כאשר מתקיים

$$P(Z=2)=0.25\ ,\ \ P(Z=1)=0.25\ ,\ P(Z=0)=0.5$$

נניח שמתקיים $(X_0=1)$.

האם תוחלת מספר הדורות עד הגעה למצב סופג היא סופית ?

<u>פתרון 2</u>

נראה שתוחלת מספר הדורות עד הכחדות היא סופית.

בכל דור עד שמגיעים להכחדות יש לפחות פרט אחד. לכן מספר הדורות עד הכחדות לא יכול להיות גדול מהמספר הכולל של הפרטים שיולדו בכל הדורות. לכן תוחלת מספר הדורות עד הכחדות לא גדולה מתוחלת מספר הצאצאים שיולדו בכל הדורות.

כאן תוחלת גודל הדור ה n היא $(0.5\cdot 0+0.25\cdot 1+0.25\cdot 2)^n=0.75^n$.

מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}0.75^n<\infty$.

<u>הערה</u>

משתנה מקרי שמקבל בהכרח ערך סופי הוא לא בהכרח בעל תוחלת סופית. לכן כאן לא מספיק להסתמך על כך שהתהליך נכחד בודאות.

<u>שאלה 3</u> (9 נקודות)

יהי $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ הילוך מקרי סימטרי על הישר. נניח שמתקיים $(X_0=3)$.

איך מתפלג מספר הביקורים במצב 1 עד שמגיעים למצב 0 ?

פתרון 3

כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם נשנים. לכן אין סוף פעמים נבקר במצב 1. לאחר כל ביקור כזה, בסיכוי חצי נגיע מייד בשלב הבא למצב 0 , וזאת באופן ב"ת בין ביקור לביקור. לכן ההתפלגות היא $G(0.5)$.

הערה

כדי שההתפלגות תהיה גיאומטרית חיוני שיהיו אין סוף ביקורים במצב 1.

שאלה 4 (45 נקודות)

תהי $\{X(t)\}$ שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4\}$ ויוצר אינפיניטיסימלי

-3	1	1	1
1	-3	1	1
1	1	-3	1
1	1	1	-3

נניח שמתקיים $(X(0) = 1)$.

א. מהי ההסתברות שבקפיצה השניה של התהליך הוא יגיע למצב 1 ?

ב. מהו $\lim_{t\to\infty} P(X(t) = 2)$?

ג. מהו $P(X(2) = 1)$?

תנו תשובה מפורשת. בססו את תשובתכם ללא שימוש במשוואות דיפרנציאליות.

ד. מהי ההסתברות שעד נקודת זמן 1.5 התהליך לא יגיע בשום שלב למצבים 2 ו 3 ?

ה. מהי ההסתברות שמספר הקפיצות המצטברות ממצב 2 למצב 3 אף פעם לא יהיה קטן ממספר הקפיצות המצטברות ממצב 2 למצב 4 ?

פתרון 4

א. הסיכוי הוא שליש.

בקפיצה הראשונה נעזוב את מצב 1. מכל מצב אחר הסיכוי לקפוץ למצב 1 הוא שליש.

ב. הסיכוי הוא רבע.

בשרשרת בלתי פריקה בזמן רציף, ההסתברות הגבולית להיות בכל מצב תמיד שווה להסתברות הסטציונרית שלו.

ג. בשרשרת זו עוזבים מצב שבו נמצאים בקצב 3. אפשר לתאר גם את התהליך ככזה שמחכים זמן המתפלג $exp(4)$ ואז בסיכוי רבע נשארים במצב ובסיכוי שלושה רבעים עוברים למצבים האחרים. כך לאחר זמן המתפלג $exp(4)$ הסיכויים להיות בארבעת המצבים השונים הם סימטריים. בהסתברות $e^{-2\cdot 4} = e^{-8}$ הנקודה הזאת תתרחש רק לאחר הזמן 2.

לכן הסיכוי המבוקש הוא $e^{-8} \cdot 1 + 0.25(1 - e^{-8}) = 0.25 + 0.75e^{-8}$.

ד. הסיכוי הוא e^{-3} .

קצב המעבר לקבוצת המצבים $\{2,3\}$ הוא 2 , בלי קשר לכך אם נמצאים במצב 1 או במצב 4.

לכן הסיכוי המבוקש הוא שמשתנה $exp(2)$ יקבל ערך גדול מ 1.5 .

ה. הסיכוי לכך הוא אפס.

אין סוף פעמים קופצים ממצב 2 למצבים 3 ו 4. כל קפיצה כזאת היא בסיכוי שווה לשני המצבים.

ההפרש בין מספר הקפיצות למצבים 3 ו 4 מקבל בהסתברות 1 אין סוף פעמים ערך חיובי ואין סוף פעמים ערך חיובי כפי שהילוך מקרי מבקר אין סוף פעמים בחיובים ואין סוף פעמים בשליליים.

שלומי