

מבוא לתהליכים סטוכסטיים / תרגיל 1

שלומי

הערות

אנא שלחו את פתרונותיכם לכתובת shlomiru@gmail.com עד יום ד' 22.03.23 בשעה 15:30.
על צירוף האותיות stochex להופיע בנושא המכתב או בגוף המכתב שבו נשלח התרגיל.
התרגילים שאני נותן הם קצרים. מומלץ ללמוד גם מתרגילים ומפתרונות של שנים קודמות שמופיעים
באתר.

שאלה 1

בתחילה אף אחד מבין גלן הודל, גארת' בייל והארי קיין לא גולש. בכל יום בהמשך כל אחד מבין גלן
הודל וגארת' בייל גולש בסיכוי חצי ובאופן ב"ת בשני האחרים ובעבר. בכל יום שבו הארי קיין לא גולש,
הוא גולש למחרת בסיכוי חצי וזאת באופן ב"ת בגלן הודל ובגארת' בייל. כאשר הארי קיין מתחיל לגלוש,
הוא כבר לא מפסיק אף פעם לגלוש.

יהי $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ - התהליך המתאר את מספר הגולשים מבין גלן הודל וגארת' בייל בימים השונים.
יהי $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ - התהליך המתאר את מספר הגולשים מבין גלן הודל והארי קיין בימים השונים.

א. מצאו את מטריצת המעבר של השרשרת $\{X_n\}_{n=0}^\infty$.

ב. הראו שהתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ אינו שרשרת מרקוב.

שאלה 2

יהיו $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ שתי שרשרות מרקוב בעלות אותו מרחב מצבים שהוא תת קבוצה בת יותר
מאבר אחד של השלמים. נניח שמטריצות המעבר של השרשרות $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ הן P ו Q
בהתאמה.

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מארבעת הטענות הבאות:

א. לא יתכן שעבור כל $i, j : P_{i,j} \neq Q_{i,j}$, אך בשתי השרשרות יש אותה חלוקה למחלקות בלתי
פריקות.

ב. לא יתכן שהשרשרות הן בעלות מרחב מצבים סופי ושמתקיים שבשתי מטריצות המעבר P ו Q
יש אפסים באותם מקומות, אך קיים מצב i שהוא מצב חולף ב $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ ומצב נשנה ב $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$.

ג. לא יתכן שהשרשרות הן בעלות מרחב מצבים אין סופי ושמתקיים שבשתי מטריצות המעבר P ו Q
יש אפסים באותם מקומות, אך קיים מצב i שהוא מצב חולף ב $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ ומצב נשנה ב
 $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$.

ד. לא יתכן שבמטריצה P כל האיברים הם חיוביים, אך קיים מצב חולף בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^\infty$.

שאלה 3

האם קיימת שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ כך שקיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(n)}$, אך לא קיים

הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,2}^{(n)}$?

אתם מוזמנים להתייעץ איתי, שלומי, בטלפון 058-5582931 שבעה ימים בשבוע.