

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 12

הערות

אנא שלחו את פתרונותיכם לכתובת shlomiru@gmail.com עד יום ד' 28.6.23 ב 15:30.
על צירוף האותיות stochex להופיע בנושא המכתב או בגוף המכתב שבו נשלח התרגיל.

שאלה 1

שאלה זו עוסקת בתהליך לידה ומוות $X(t)$ בו קצב הלידה הוא קבוע λ וקצבי המוות ממצב i הם $i\mu$ (זאת אומרת, קצב מוות הפרופורציונלי לגודל האוכלוסיה).
מצאו את $E(X(t))$ בהינתן $X(0) = 1$.

שאלה 2

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים של כל הטבעיים ומצב התחלתי 1.
קבוצה לא ריקה A של מספרים טבעיים תקרא כאן "חלוקה" אם היא קבוצה חלקית ממש של המספרים הטבעיים. כמקובל נסמן ב A^c את הקבוצה המשלימה ל A .
נגדיר תהליך סטוכסטי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעל קבוצת המצבים $\{a, b\}$ לפי

$$Y_n = \begin{cases} a & X_n \in A \\ b & X_n \in A^c \end{cases}$$

- א. האם קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שכל מצביה חולפים, כך שקיימות אין סוף חלוקות שעבורן $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב?
- ב. האם קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלתי פריקה ונשנית חיובית, כך שעבור כל חלוקה A . $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב?
- ג. האם קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלתי פריקה ונשנית חיובית, כך שקיימות מספר סופי של חלוקות שעבורן $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב, אך לא קיימות אין סוף חלוקות שעבורן $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב?
- ד. האם קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלתי פריקה ונשנית אפס, כך שעבור החלוקה $A = \{1\}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב?

בכל מקרה שבו קיימת שרשרת מתאימה, יש לתאר שרשרת כזאת.

אתם מוזמנים להתייעץ איתי, שלומי, בטלפון 058-5582931 שבעה ימים בשבוע.