

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 4

אנא שלחו את פתרונותיכם לכתובת shlomiru@gmail.com עד יום ב' 01.05.23 בסוף היום.
על צירוף האותיות stochex להופיע בנושא המכתב או בגוף המכתב שבו נשלח התרגיל.

שאלה 1

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים השלמים $-\infty < i < +\infty$. מתקיים: $X_0 = 0$ ולכל $n \geq 0$, $X_{n+1} = X_n + b_n$, כאשר b_n הם משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים $P(b_n = +3) = \frac{2}{5}$ ו $P(b_n = -2) = \frac{3}{5}$; זאת אומרת שבכל שלב בסכוי $\frac{2}{5}$ עושים שלושה צעדים ימינה ובסכוי $\frac{3}{5}$ עושים שני צעדים שמאלה.

א. מהו המחזור של מצבי השרשרת?
ב. הוכיחו שכל המצבים הם נשנים.

(רמז: תוכלו אם תרצו, להעזר בנוסחת סטרלינג: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.)

שאלה 2

תהי X_1, X_2, X_3, \dots סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$$P(X_i = 0) = \frac{3}{5}, \quad P(X_i = 1) = \frac{2}{5} \quad \text{לכל } i \geq 1. \quad \text{יהי } S_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

נסתכל על הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים X_1, X_2, X_3, \dots .

א. הראו שכל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$ יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$ עבור איזשהו n טבעי.

ב. הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$, אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$, יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.

ג. הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ $\frac{2}{5}$ לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

ד. הראו שהמנה $\frac{2}{5}$ תתקבל אינסוף פעמים בהסתברות 1.

(רמז: תוכלו להסתמך על הטענה שהיה צריך להוכיח בסעיף ב' משאלה 1 וזאת גם אם לא הצלחתם להוכיח אותה.)

ה. הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ היתה שרשרת מרקוב.

ו. הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

המשך בעמוד הבא

שאלה 3

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב שמצביה הם כל השלמים.

נניח שמתקיים עבור כל $i < 0$ $P_{i,i-1} = 0.6 = 1 - P_{i,i+1}$

ועבור כל $i \geq 0$ $P_{i,i-1} = 0.5 = 1 - P_{i,i+1}$.

האם קיימים מצבים נשנים בשרשרת? האם קיימים מצבים חולפים בשרשרת?

שאלה 4

יהי j מצב נשנה בשרשרת מרקוב. האם מתקיים בהכרח $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{j,j}^{(n)} > 0$?

אתם מוזמנים להתייעץ איתי, שלומי, בטלפון 058-5582931 שבעה ימים בשבוע.