

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 8

אנא שלחו את פתרונותיכם לכתובת shlomiru@gmail.com עד יום ד' 31.05.23 ב 15:30.
על צירוף האותיות stochex להופיע בנושא המכתב או בגוף המכתב שבו נשלח התרגיל.

שאלה 1

שאלה זו עוסקת בשרשרות מרקוב הומוגניות שמרחב המצבים שלהן הוא כל השלמים (חיובים, שליליים ואפס).

נניח שמתקיים עבור כל $-\infty < i < +\infty$: $P_{i,i+1} = 1 - P_{i,i-1}$.

נניח גם שמתקיים $\lim_{i \rightarrow +\infty} P_{i,i+1} = 0.5$.

- א. האם יתכן שכל מצבי השרשרת הם נשנים אפס? ב. האם יתכן שבשרשרת יש מצב נשנה יחיד?
ג. האם יתכן שיש גם מצבים נשנים חיובית וגם מצבים נשנים אפס וגם מצבים חולפים?
ד. כמה, לכל היותר, מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים אפס יכולות להיות?
ה. האם יתכן שכל המצבים מהווים מחלקה בלתי פריקה של מצבים חולפים?

שאלה 2

הי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו Z .
נניח שמתקיים $E(Z) = 100$ ו $(X_0 = 1)$. האם יתכן שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) > 0.5$?

שאלה 3

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח שמתקיים $(X_0 = 3)$.

הי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי ש Z מתפלג,

כאשר $P(Z=2) = \frac{2}{3}$, $P(Z=0) = \frac{1}{3}$. נניח שמתקיים $(Y_0 = 1)$.

נניח ששני התהליכים $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם בלתי תלויים. מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{Y_n} = 1)$?

שאלה 4

בראשון לינואר 2000 נולדו באי מספר פרטים. בכל יום ראשון לינואר מוליד כל פרט שנולד שנה קודם לכן מספר פרטים ומייד נפטר. נניח שמספר הפרטים שמוליד כל פרט הוא משתנה מקרי שהוא ב"ת במספר הפרטים שמולידים כל הפרטים האחרים. נניח שכל פרט מוליד מספר פרטים שמתפלג כמו Z , כאשר מתקיים $P(Z=1) = 0$ ו $E(Z) = 1.5$.
האם יתכן שבהינתן שבראשון בינואר 2023 היו באי פרטים, אז בהסתברות 1 תמיד יהיו באי פרטים?

אתם מוזמנים להתייעץ איתי, שלומי, בטלפון 058-5582931 שבעה ימים בשבוע.