פתרון תרגיל 1 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

ראו פתרון מוקלט כאן.

א. מרחב המצבים הוא $\{0,1,2\}$. מטריצת המעבר היא

$$\begin{bmatrix} 0.5^2 & 2\cdot 0.5\cdot 0.5 & 0.5^2 \\ 0.5^2 & 2\cdot 0.5\cdot 0.5 & 0.5^2 \\ 0.5^2 & 2\cdot 0.5\cdot 0.5 & 0.5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \end{bmatrix}$$

ב. למשל מתקיים

$$P(Y_3=0|Y_2=1,Y_1=2)=0\neq P(Y_3=0|Y_2=1,Y_1=0)$$

כך העבר הקודם נותן אינפורמציה שלא נתונה לפי השלב האחרון.

אם בעבר היו שני גולשים, זה אומר שהארי קיין כבר גלש. אם הארי קיין כבר גלש אז הוא לא יפסיק לגלוש וכבר לא נוכל להגיע לעולם למצב שבו אף אחד לא גולש. אם לא נתון שהיה שלב שבו היו שני גולשים, אז יתכן שהארי קיין עוד אף פעם לא גלש ולכן אפשר לעבור למצב אפס.

שאלה 2

א. זה יתכן.

נתן דוגמא לשתי מטריצות מעבר כאלה על מרחב של שני מצבים.

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \text{ ו } \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

בשתי השרשרות יש מחלקה יחידה שכוללת את שני המצבים.

הערה:

זה לא יתכן בשרשרת בת יותר ממחלקה בלתי פריקה אחת. אם ב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יש יותר ממחלקה אחת, אז קיים לפחות זוג מצבים אחד i,j שאין מעברים ביניהם. זאת אומרת ש $P_{i,j}=P_{j,i}=0$. מכיון שכל אברי Q הם שונים, אז $Q_{i,j}>0$ וגם $Q_{j,i}>0$. ולכן בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, אם i ו j הם ארגודים, אז הם באותה מחלקה.

ב. לא יתכן.

בשרשרת סופית מצב ארגודי הוא נשנה. ארגודיות נקבעת רק לפי זהות המקומות במטריצת המעבר שאינם אפסים (לא משנה מהי ההסתברות לחזור במסלול מסוים, חשוב רק אם יש אפשרות לחזור מכל מצב שאליו ניתן להגיע מהמצב המקורי). לכן אם יש אפסים בדיוק באותם מקומות, אז אותם מצבים הם ארגודים וכך אותם מצבים הם נשנים.

ג. זה יתכן.

נתן דוגמא לשתי שרשרות כאלה:

מרחב המצבים יהיה של השלמים האי שליליים. בשתי מטריצות המעבר בכל שורה יהיו בדיוק שני איברים שונים מאפס בעמודה השמאלית ובאלכסון שמימין לאלכסון הראשי.

יתקיים לכל $i\geq 0$: $P_{i,0}=0.1^{i+1}=1-P_{i,i+1}$, $Q_{i,0}=Q_{i,i+1}=0.5$.

נשים לב שבשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, בכל שלב עוברים למצב 0 בסיכוי 0.5 וזאת באופן בלתי תלוי בשלבים אחרים. לכן, ההסתברות לא לחזור למצב 0 בשום שלב עד שלב n היא 0.5^n.

ההסתברות לא לחזור למצב 0 אי פעם קטנה מ 0.5^n לכל n ולכן שווה לאפס. לכן בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב 0 הוא נשנה.

בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ כדי לחזור למצב 0 לראשונה ב i צעדים, צריך להגיע למצב $i-1$ ואז צריך להתרחש אירוע שהסתברותו 0.1^i. לכן ההסתברות לחזור בבדיוק i צעדים אינה גדולה מ 0.1^i. מכיון שהסתברות איחוד אינה גדולה מסכום ההסתברויות אז ההסתברות לחזור אי פעם אינה גדולה מ $\frac{1}{9} = \frac{0.1}{1-0.1} = \sum_{i=1}^{\infty} 0.1^i$. לכן מצב 0 הוא חולף.

ד. זה יתכן.
נתאר שרשרת שמרחב המצבים שלה הוא השלמים האי שליליים ושיש למטריצת המעבר שלה דמיון למטריצת המעבר P מסעיף ג'.
שוב יתקיים $P_{i,i+1} = 1-0.1^{i+1}$. כל שורה צריכה להסתכם ב 1. בכל שורה נבחר את יתר האיברים כאברי טור של איברים חיובים שמסתכם ב 0.1^{i+1} במקום שהכל יוקצה לאיברים $P_{i,0}$ (למשל הטור שהאיבר הראשון שלו הוא $\frac{0.1^{i+1}}{2}$ והמנה שלו היא 0.5 הוא מתאים).
לפי ההסבר של סעיף ג' , בהסתברות קטנה מ 1, נחרוג אי פעם מהמעברים המונוטונים ממצב i למצב $i+1$. לכן לא בודאות נחזור למצב 0 לאחר שמתחילים בו. לכן מצב 0 הוא חולף.
ההסתברות לחרוג מהמסלול המונוטוני שבו תמיד עוברים לטבעי העוקב לא השתנתה ביחס לדוגמא שניתנה בסעיף ג'. אם שם היתה הסתברות חיובית לעשות את המסלול הזה, אז גם כאן יש לה הסתברות חיובית.
הערה:
מכל מצב יהיה סיכוי לחזור למצב 0. אך כאמור, לא בודאות נחזור אליו אי פעם.

שאלה 3
ראו פתרון מוקלט כאן.

דוגמא למטריצת מעבר של שרשרת שבה התופעה קורת היא

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

מתקיים $P_{1,1}^{(n)} = 0$ לכל $n \geq 1$.
אם מתחילים במצב 1 אז בשלבים אי זוגיים נהיה במצב 2 ובשלבים זוגיים נהיה במצב 3.
מתקיים $P_{1,2}^{(2n+1)} = 1$ לכל $n \geq 0$. מתקיים $P_{1,2}^{(2n)} = 0$ לכל $n \geq 1$.
לכן לסדרה $\left\{P_{1,2}^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ אין גבול.

שלומי