פתרון תרגיל 10 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

צפו בהקלטת פתרון כאן.

א.

-1	1	0	0	0	0
1	-2	1	0	0	0
0	1	-2	1	0	0
0	0	1	-2	1	0
0	0	0	1	-2	1
0	0	0	0	1	-1

(במצב 0 יש רק זרם של מגיעים. במצב 5 יש רק זרם של עזיבה של הצרכן שנמצא בשרות.
במצבים האחרים יכול גם להתוסף צרכן וגם לעזוב צרכן).

ב. במצב 3 שוהים זמן המתפלג $\exp(2)$. ממצב 3 בהכרח עוברים או למצב 2 או למצב 4. גם בכל אחד ממצבים אלה, זמן השהות מתפלג $\exp(2)$. לכן הזמן עד הקפיצה השניה מתפלג כסכום של שני משתנים $\exp(2)$ ב"ת.

ג. במצב 0 שוהים זמן המתפלג $\exp(1)$. ממצב 0 בהכרח עוברים למצב 1. במצב 1 שוהים זמן המתפלג $\exp(2)$. לכן הזמן עד הקפיצה השניה מתפלג כסכום של שני משתנים מעריכיים שוני פרמטר.

ד. במצב 1 שוהים זמן המתפלג $\exp(2)$. ממצב 1 יכולים לעבור או למצב 0 או למצב 2. זמן השהות במצב 0 מתפלג $\exp(1)$ וזמן השהות במצב 2 מתפלג $\exp(2)$. קומבינציה של משתנים מעריכיים אינה משתנה מעריכי. לכן הזמן עד הקפיצה השניה אינו מתפלג כסכום של משתנים מעריכיים.
נתן הסבר אינטואיטיבי לכך שהגרלה בין משתנים מעריכיים אינה בעל התפלגות מעריכית.
התפלגות מעריכית היא חסרת זכרון. כאן מראש יודעים מהו הסיכוי שמדובר במשתנה מעריכי מסוג אחד ומהו הסיכוי שמדובר במשתנה מעריכי מסוג אחר. אבל אם ידוע שההגרלה שבין המעריכיים נותנת ערך גדול ממשהו אז גדלים הסיכויים (ההסתברות המותנה) שמדובר במעריכי שנוטה לקבל ערכים גדולים יותר. כך גדלים הסיכויים שההגרלה תשרוד יותר זמן. כך לא נשמר חוסר הזכרון.

שאלה 2

צפו בהקלטת פתרון כאן.

א.

$$\begin{cases} (-2)\pi_1 + 4\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 - 8\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 + 4\pi_2 - 2\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

ומתקיים $\pi_1 = \pi_3 = \frac{4}{9}$, $\pi_2 = \frac{1}{9}$.

ב.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} \\ \frac{4}{4+4} & 0 & \frac{4}{4+4} \\ \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ג. מדובר בשרשרת אי פריקה ולכן יש וקטור סטציונרי יחיד. השרשרת לא מחזורית (ניתן לחזור לכל מצב לאחר שני צעדים וגם אחר שלושה צעדים) ולכן יש הסתברויות גבוליות ששוות להסתברויות הסטציונריות. מטריצת המעבר היא דו סוכסטית ולכן הוקטור האחיד הוא וקטור סטציונרי. וקטור ההסתברויות הסטציונרי היחיד הוא $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. לכן לכל מצב יש הסתברות גבולית של $\frac{1}{3}$.

ד. בזמני הקפיצות יש לכל מצב הסתברות גבולית של $\frac{1}{3}$, אך במצב 2 כל שהות היא בממוצע קצרה יותר מאשר במצבים האחרים. (משך זמן של שהות בודדת במצב 2 מתפלג $\exp(8)$ ובכל אחד מהמצבים האחרים משך שהות בודדת מתפלג $\exp(2)$).

ה.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

כאן לגבי כל המצבים יש אותה התפלגות של שהות רצופה: $\exp(2)$.

שאלה 3

צריך לבחור שעון עם קצב של לפחות 8.

נבחר שעון עם קצב $\lambda = 8$ ונקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-8t}\frac{(8t)^k}{k!}\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{4}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^k$$

או אם נבחר שעון בקצב $\lambda = 16$ נקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-16t}\frac{(16t)^k}{k!}\begin{pmatrix}\frac{8}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16}\\ \frac{1}{16} & \frac{12}{16} & \frac{3}{16}\\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{15}{16}\end{pmatrix}^k$$

<u>שאלה 4</u>

מתקיים

$$P_{1,1}^{\backslash}(t) = -P_{1,1}(t) + 4P_{1,2}(t)$$

או

$$P_{1,1}^{\backslash}(t) = -P_{1,1}(t) + 4\left(1 - P_{1,1}(t)\right)$$

או

$$P_{1,1}^{\backslash}(t) = -5P_{1,1}(t) + 4$$

למשוואה זו יש קבוצת פתרונות

$$P_{1,1}(t) = ce^{-5t} + \frac{4}{5}$$

בצירוף תנאי התחלה $P_{1,1}(0) = 1$ נקבל פתרון $P_{1,1}(t) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}e^{-5t}$.

אם נציב $t = 6$ נקבל $P_{1,1}(6) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}e^{-30}$.

שלומי