פתרון תרגיל 11 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

סעיף א'

בכל ביקור במצב הראשון, זמן השהות בו מתפלג $\exp(4)$ ובכל אחד משני המצבים האחרים זמן השהות בכל ביקור מתפלג $\exp(1)$. מהמצב הראשון כמובן שעוברים לאחד משני המצבים האחרים. מכל אחד משני המצבים האחרים עוברים בהכרח ישירות למצב הראשון. כך בעשרת השהויות הראשונות בהכרח יש 5 שהויות במצב הראשון ו 5 שהויות במצבים האחרים. לכן בכל מקרה הזמן עד הקפיצה העשירית מתפלג כסכום של עשרה משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים ש 5 מהם מתפלגים $\exp(4)$ ו 5 מהם מתפלגים $\exp(1)$.

סעיף ב'

עבור כל $0 \le j \le 3$ מתקיים עבור כל $0 \le i \le 3$: $\lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t) = \pi_j$ כאשר π_j הוא הרכיב ה- j בוקטור הסטציונרי היחיד של השרשרת.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

מתקבל וקטור הסתברויות סטציונרית: $\pi_3 = \frac{1}{5} \quad , \quad \pi_2 = \frac{3}{5} \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{5}$

סעיף ג'

נשים לב שעוצמת היציאה ממצב 1 היא 4 ושעוצמת הכניסה אליו מכל אחד משני המצבים האחרים היא 1. מתקיים $P_{1,1}'(t) = -4P_{1,1}(t) + \left(1 - P_{1,1}(t)\right)$, זאת אומרת $P_{1,1}'(t) = -5P_{1,1}(t) + 1$.

למשוואה זו יש פתרון כללי $P_{1,1}(t) = c_1 e^{-5t} + \frac{1}{5}$. צריך למצוא פתרון שמתאים לתנאי $P_{1,1}(0) = 1$.

לכן נקבל $c_1 = \frac{4}{5}$ ופתרון $P_{1,1}(t) = \frac{4}{5} e^{-5t} + \frac{1}{5}$.

שאלה 2

דרוש שיהיו לפחות שלושה מצבים בשרשרת. אם יש רק שני מצבים, אז לאחר הקפיצה הראשונה בהכרח עוברים למצב האחר. דוגמא מתאימה היא שרשרת בת שלושה מצבים ויוצר אינפינטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

כל עוד לא נמצאים במצב 2 , כל קפיצה תביא אותנו אליו בסיכוי חצי. לכן מספר הקפיצות עד הגעה אליו מתפלג $G(0.5)$.

שאלה 3

הקלטת פתרון נמצאת כאן.

א. כל אחת ממערכות התורים היא שרשרת מרקוב בעלת יוצר המקיים $\lambda_{i,i+1} = 1$ לכל $i \geq 0$ ומקיים $\lambda_{i,i-1} = 2$ לכל $i \geq 1$. קיים וקטור סטציונרי שמקיים את תנאי האיזון המפורט. מתקיים $\pi_i = 0.5^{i+1}$. כדי שבשתי המערכות יהיה בסך הכל צרכן אחד, צריך שאחת תהיה ריקה ובאחרת יהיה צרכן אחד. ההסתברות הגבולית לכך היא $2 \cdot 0.5 \cdot 0.5^2$.

ב. למעשה זו כעת מערכת תור של שני שרתים ואין סוף מקומות המתנה. מתקיים $\lambda_{i,i+1} = 2$ לכל $i \geq 0$. מתקיים $\lambda_{1,0} = 2$ ומתקיים $\lambda_{i,i-1} = 4$ לכל $i \geq 2$. גם כאן מתקיים תנאי האיזון המפורט ומתקיים $\pi_1 = \frac{1}{3}$.

שלומי