פתרון תרגיל 12 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

יהי $y(t)$ - תוחלת מספר הפרטים בזמן t .

$$y'(t) = \lambda - \mu y(t)$$

הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + ce^{-\mu t}$$

כדי לעמוד בתנאי ההתחלה שהוא $y(0) = 1$ צריך להתקיים:

$$c = \frac{\mu - \lambda}{\mu}$$

ולכן נקבל פתרון

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} e^{-\mu t}$$

שאלה 2

פתרון מוקלט נמצא כאן.

א. נתאר שרשרת מתאימה.
נניח שמכל מצב אי זוגי עוברים ישירות למצב 2 בהסתברות 1 ומכל מצב $2n$ עוברים ישירות למצב $2n + 2$ בהסתברות 1. כל המצבים הם לא ארגודים ולכן הם חולפים. בקבוצה A ניתן לכלול את מצב 1 וכל תת קבוצה של המצבים האי זוגיים. מכל מצב עוברים בהסתברות 1 למצבים הזוגיים.

ב. נתאר שרשרת מתאימה.
נניח שעבור כל זוג מצבים i, j מתקיים $P_{i,j} = 0.5^j$. התפלגות זמן החזרה למצב j היא $G(0.5^j)$ ותוחלת זמן החזרה לכל מצב היא סופית ולכן המצבים הם נשנים חיובית. בתהליך $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ לגבי כל קבוצת מצבים, בכל שלב עוברים אליה באותה הסתברות באופן ב"ת בשלבים האחרים.

ג. נתאר שרשרת מתאימה.
נניח שמתקיים עבור כל $i \geq 2$: $P_{i,1} = 1$, $P_{1,i} = 0.5^{i-1}$. השרשרת בלתי פריקה ולמצב 1 חוזרים בודאות בשני צעדים. לכן המצבים נשנים חיובית. אם המצב 1 נמצא בקבוצה נפרדת מיתר המצבים אז בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ עוברים בודאות מכל מצב למצב האחר. אם יש בקבוצה של מצב 1 עוד מצבים, אז בתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אין הומוגניות בזמן כי התקופה תקבע את הסיכוי לעבור בשלב הבא לקבוצה A. התקופה מגלה אם נמצאים במצב 1 או במצב אחר מהקבוצה A.

ד. לא קיימת חלוקה כזאת.
מכיון שמצב 1 הוא נשנה, אז קיים שלב סופי שבו ניתן לחזור אליו כאשר נמצאים במצב אחר שאליו עזבנו. אבל אם היתה אותה הסתברות חיובית לחזור אליו ממצבים אחרים בכל שלב, אז תוחלת זמן החזרה אליו היתה סופית, והוא היה נשנה חיובי.

שלומי