

פתרון תרגיל 4 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. כדי לחזור ממצב 0 למצב 0, מספר הצעדים ימינה צריך להיות שווה שני שלישים ממספר הצעדים שמאלה. לכן ניתן לחזור למצב 0 רק במספר צעדים שהוא כפולה של 5. לכן המחזור הוא איזושהי כפולה של 5 ניתן לחזור למצב 0 ב 5 צעדים. לכן המחזור של מצב 0 הוא לא יותר מ 5. לכן הוא שווה בדיוק ל 5. השרשרת היא אי-פריקה ובשרשרת אי פריקה לכל המצבים יש את אותו מחזור לכן המחזור של כל המצבים הוא 5.

נראה שהשרשרת בלתי פריקה: עבור זוג מצבים i, j המקיימים $i > j$: ניתן להגיע מ j ל i אם הולכים $i - j$ צעדים של 3 ימינה ו $i - j$ צעדים של 2 שמאלה. ניתן להגיע מ j ל i אם הולכים $i - j$ צעדים של 3 ימינה ו $2(i - j)$ צעדים של 2 שמאלה.

ב. נשנות היא תכונה מחלקתית. מכיוון שהשרשרת היא אי-פריקה אז די להראות שמצב 0 הוא נשנה.

נשתמש בקריטריון לנשנות. נבדוק האם $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(n)} = \infty$. למעשה ניתן לחזור למצב 0 רק לאחר

מספר צעדים שהוא כפולה של 5, לכן יש לבדוק אם מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(5n)} = \infty$. מתקיים

$$P_{0,0}^{(5n)} = \binom{5n}{2n} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n} \left(\frac{3}{5}\right)^{3n} = \frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n} \left(\frac{3}{5}\right)^{3n} \stackrel{\text{stirling}}{\cong} \\ \cong \frac{\sqrt{2\pi 5n} \left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}}{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi 3n} \left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n} \left(\frac{3}{5}\right)^{3n}$$

ולזה יש סדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}}$. מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ לכן מצב 0 הוא נשנה וכל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

שאלה 2

א. הרציונלי $\frac{p}{q}$ יכול להתקבל לאחר q נסיונות שמתוכם ב p נסיונות יהיו הצלחות.

ב. נניח שלאחר q_1 נסיונות, הערך 1 התקבל p_1 פעמים. נראה שקיים n כך שבהסתברות חיובית, לאחר $q_2 \cdot 10^n$ נסיונות תתקבל המנה $\frac{p_2}{q_2}$. n יהיה תלוי ב q_1, p_1, q_2, p_2 :
נבחר n כך ש $q_2 \cdot 10^n \geq q_1$ וגם $p_2 \cdot 10^n \geq p_1$ וגם $q_2 \cdot 10^n - p_2 \cdot 10^n \geq q_1 - p_1$.

המנה $\frac{p_2}{q_2}$ יכולה להתקבל לאחר שמתוך $q_2 \cdot 10^n - q_1$ הנסיונות שיבואו לאחר q_1

הנסיונות הראשונים, יתקבל הערך 1 ב $p_2 \cdot 10^n - p_1$ פעמים.

ג. על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים, סדרת המנות $\frac{S_n}{n}$ שואפת ל $\frac{2}{5}$ (זה כאן

התוחלת של כל אחד מהמשתנים הבלתי תלויים וחסומים). עבור כל $\varepsilon > 0$, מספר הפעמים שתתקבל מנה המרוחקת מ $\frac{2}{5}$ בלפחות ε הוא סופי. כל רציונלי $\frac{p}{q}$ ששונה מ $\frac{2}{5}$

$$\text{מרוחק מ } \frac{2}{5} \text{ ב } \varepsilon = \left| \frac{2}{5} - \frac{p}{q} \right| .$$

י. הוכחנו בשאלה 1 שכאשר בכל שלב הולכים שלושה צעדים ימינה בסיכוי $\frac{2}{5}$ ושאלה בסיכוי $\frac{3}{5}$

, אז השרשרת היא נשנית. לכן חוזרים לנקודת ההתחלה ∞ פעמים. זאת אומרת ש ∞ פעמים תהיה פרופרצית מספר הפעמים שהלכנו ימינה שווה בדיוק ל $\frac{2}{5}$. כך כאן עבור ∞ ערכי n תהיה

פרופורצית מספר המשתנים עד אליו שיקבלו את הערך 1 שווה ל $\frac{2}{5}$.

ii. לגבי שרשרת מרקוב הראנו בהרצאה, שנשנות היא תכונה מחלקתית, זאת אומרת שאם שני מצבים מקושרים אז אם אחד מהם הוא נשנה אז גם האחר הוא נשנה. כאן הראנו שיש השתלשלות שמובילה מכל מנה רציונלית בקטע הפתוח (0,1) לכל מנה רציונלית בקטע זה. אך גם הראנו

שהמנה $\frac{2}{5}$ מתקבלת אינסוף פעמים בזמן שכל מנה אחרת לא מתקבלת אינסוף פעמים.

$$1. \quad P\left(\frac{S_3}{3} = \frac{2}{3} \mid \frac{S_2}{2} = \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} > 0, \quad P\left(\frac{S_5}{5} = \frac{2}{3} \mid \frac{S_4}{4} = \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (\text{מדובר בהסתברויות}$$

מותנות). מכאן הסתברות המעבר תלויה בזמן ולא רק במצב: (אין הומוגניות בזמן).

שאלה 3

כל המצבים הם חולפים.

ממצב 0 אפשר לעבור למצב -1. ממצב -1 לא בודאות חוזרים למצב 0 (כמו שבהילוך מקרי שמוטה שמאלה על כל הישר, לא חוזרים בודאות ממצב -1 למצב 0 : העובדה שכאן באי שליליים יש סימטריה, לא רלוונטית לסיכויי החזרה מ -1 ל 0). לכן כאשר מתחילים במצב 0, לא בודאות חוזרים אליו. לכן מצב 0 הוא חולף. בשרשרת המתוארת כל המצבים מקושרים אחד לשני. לכן כל המצבים הם חולפים (חולפות היא תכונה מחלקתית).

שאלה 4

בהילוך מקרי סימטרי על הישר, אי אפשר להיות במצב ההתחלתי לאחר מספר אי זוגי של צעדים, וגם ראינו שעבור ערכי n גדולים הסתברות להיות בנקודה ההתחלתית בשלב ה $2n$ מתנהגת כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$. לכן ההסתברות הגבולית להיות במצב בשלב נתון שואפת לאפס. ראינו גם שהמצבים בהילוך המקרי הסימטרי הם נשנים.

דוגמא מסוג אחר היא של שרשרת מחזורית בת שני מצבים. מטריצת המעבר היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים עבור כל n : $P_{1,1}^{(2n)} = 1$ ו $P_{1,1}^{(2n+1)} = 0$. כך לא קיים הגבול. ברור שהמצבים הם נשנים, כי חייבים לחזור למצב שממנו מתחילים (חייבים לחזור בשני צעדים).

שלומי