

פתרון תרגיל 5 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. זה יתכן.

זה יתכן למשל אם שני המצבים ההתחלתיים הם במחלקות שונות.
זה יתכן גם בשרשרת בת שני מצבים ובעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

שבה אם שני התהליכים מתחילים במצבים שונים, אז כל אחד מהם מבקר בכל מצב, אך הם אף פעם לא נפגשים.

ב. זה יתכן.

זה יתכן למשל בשרשרת בת שני מצבים ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

שבה עבור כל מצב התחלתי שני התהליכים מגיעים למצב הראשון ומבלים רק בו.

ג. זה יתכן.

זה יתכן למשל בשרשרת בעל שלושה מצבים ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שני תהליכים שמתחילים במצבים הראשון והשני נפגשים לפחות פעם אחת בסיכוי 0.5 ואז הם גם נפגשים אין סוף פעמים.

שאלה 2

א. אפשר לחזור למצב 0 ממצב 0 בצעד אחד. לכן המחזור של מצב 0 הוא 1 (מצב לא מחזורי).
אי מחזוריות היא תכונה מחלקתית ולכן כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם לא מחזוריים.
אם עוברים ממצב 0 למצב i , אז חוזרים למצב 0 לאחר $i+1$ צעדים שכוללים צעד למצב i ו- i צעדים חזרה ממנו ל 0. התפלגות זמן החזרה למצב 0 מעצמו היא $G(0.5)$ ולכן היא בעלת תוחלת

$$\frac{1}{0.5} = 2. \text{ לכן תוחלת זמן החזרה למצב 0 מעצמו היא סופית ולכן הוא מצב נשנה חיובי.}$$

ב. אפשר לחזור למצב 0 ממצב 0 ב 7 צעדים ואפשר גם ב 8 צעדים. המחלק המשותף המכסימלי של 7 ו 8 הוא 1. לכן מצב 0 הוא לא מחזורי. אי מחזוריות היא תכונה מחלקתית ולכן כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם לא מחזוריים.

בהסתברות 0.5^{i-6} חוזרים למצב 0 לאחר i צעדים. התפלגות זמן החזרה למצב 0 היא הזזה בקבוע של 6 של משתנה $G(0.5)$ (שימו לב שבאותה הסתברות שמשנתה גאומטרי מקבל את הערך 1, משנתה זה מקבל את הערך 7, באותה הסתברות שגאומטרי מקבל את הערך 2, זה מקבל את הערך 8 וכך הלאה). לכן, תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא 8. שוב תוחלת זמן החזרה היא סופית ולכן המצב הוא נשנה חיובי.

שאלה 3

ניתן לחזור ממצב 1 לעצמו בצעד אחד, לכן מצב 1 הוא לא מחזורי. לגבי מצב לא מחזורי i תמיד קיימת ההסתברות הגבולית $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,i}^{(n)}$. אם המצב הוא חולף או נשנה אפס אז הגבול הוא אפס בלי קשר לאי מחזוריות. אם המצב הלא מחזורי הוא נשנה חיובי אז הגבול הוא $\frac{1}{E_i}$ כאשר E_i היא תוחלת זמן החזרה

למצב. כאן בהסתברות 0.3 חוזרים ממצב 1 לעצמו בצעד אחד ואם לא אז עוברים למצב 2 וחוזרים למצב 1 בהכרח בצעד השני. לכן כאן $E_i = 0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 2 = 1.7$. לכן הגבול הוא $\frac{1}{1.7}$.

שלומי