

פתרון תרגיל 6 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. מטריצת המעבר היא:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

- ב. מכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר (בלכל היותר שני צעדים). לכן השרשרת היא בלתי פריקה.
ג. מכל מצב ניתן לחזור לעצמו בשני צעדים וניתן לחזור אליו גם בשלושה צעדים. לכן המחזור הוא 1.
ד. וקטור סטציונרי מקיים

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

מפתרון המערכת מתקבל וקטור סטציונרי $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. שימו לב שזהו הפתרון עבור כל

$$0 < p < 1$$

הערה

- מטריצת המעבר היא דו סטוכסטית (כל עמודה מסתכמת ב 1). כאשר מטריצת המעבר היא דו סטוכסטית, אז הוקטור האחיד הוא וקטור סטציונרי.
ה. במחלקה בלתי פריקה אין יותר מוקטור סטציונרי יחיד. זה מתקבל גם משיקולים אלגבריים כי אין פתרון נוסף למערכת.
ו. מכיון שהמצבים לא מחזוריים, אז לגבי כל מצב, יש לו הסתברות גבולית ששווה להסתברות הסטציונרית שלו.
ז. מתקיים $\pi_0 = \frac{1}{E_0}$. לכן תוחלת הזמן עד חזרה למצב 0 לאחר שמתחילים בו היא 3.

שאלה 2

צפו בפתרון מוקלט כאן.

- א. אגף ימין תמיד שווה ל 1 יתכן שאגף שמאל שווה ל 0.
ב. אגף ימין עבור כל n קבוע הסגמא שווה ל 1, כי חייבים להיות בדיוק באחד מהמצבים.
ג. לגבי אגף שמאל, אם כל המצבים הם לא ארגודים, ובנוסף אי אפשר לחזור לשום מצב שבו נמצאים, אז כל הגבולות הם אפסים, והסכום של הגבולות הוא אפס.

הערה

עבור כל מצב j שאינו נשנה חיובי הגבול הוא אפס.

ז. זה יתכן.

אם בסיכוי חצי עוברים למצב סופג ובסיכוי חצי עוברים למצבים שאי אפשר לחזור מהם לעצמם
אי פעם אז סכום הגבולות הוא חצי.

הערה

אפשר גם שבסיכוי חצי עוברים למחלקה של נשנים חיובית לא מחזוריים ובסיכוי חצי עוברים
למצבים שאינם נשנים חיובית.

שלומי