פתרון תרגיל 7 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. ההילוך של הצריח הוא הילוך מקרי על גרף (בכל שלב הוא עובר לכל אחד משכניו בסיכוי שווה). מכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר (אפילו באורך של לא יותר משני מהלכים). לכן יש וקטור סטציונרי יחיד. הדרגה של כל צומת היא 14. לכן ההסתברות הסטציונרית של כל משבצת היא $\frac{1}{64}=\frac{14}{64\cdot 14}$ ותוחלת מספר הצעדים עד חזרה למשבצת ההתחלתית היא 64.

ב. יהי e_0 - תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למשבצת ההתחלתית.
יהי e_1 - תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למשבצת ההתחלתית כאשר נמצאים במשבצת אחרת שנמצאת באותה שורה או באותו טור של המשבצת ההתחלתית.
יהי e_2 – תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למשבצת ההתחלתית כאשר נמצאים במשבצת אחרת שלא נמצאת באותה שורה של המשבצת ההתחלתית וגם לא נמצאת באותו טור של המשבצת ההתחלתית.
מתקיים

$$\begin{cases} e_0 = 1 + e_1 \\ e_1 = 1 + \frac{1}{14}\cdot 0 + \frac{6}{14}e_1 + \frac{7}{14}e_2 \\ e_2 = 1 + \frac{2}{14}e_1 + \frac{12}{14}e_2 \end{cases}$$

שאלה 2

עבור כל מצב $1 \le k \le 99$ בסיכויים שווים עוברים למצבים $k-1$ או $k+1$. לאחר מעבר למצב אחר הסיכוי להגיע למצב 100 לפני שמגיעים למצב 0 נתון על-ידי נעלם אחר שבסדרה.
אם מגיעים למצב 0 לפני שהגענו למצב 100 אז ברור שהסיכוי להגיע ל 100 לפני 0 הוא 0. בהינתן שמגיעים קודם ל 100 , הסיכוי הוא כמובן 1 כי המאורע כבר התרחש.
מתקיים עבור כל $1 \le k \le 99$: $u_k = 0.5u_{k-1} + 0.5u_{k+1}$. סדרה שבה כל איבר שווה לממוצע של הקודם לו והעוקב אותו היא סדרה חשבונית. מתקיים $u_0 = 0$, $u_{100} = 1$ ולכן ההפרש של הסדרה הוא $\frac{1}{100}$ ומתקיים למשל $u_1 = \frac{1}{100}$. שימו לב שמתקיימת כאן צורה של הוגנות: מתחילים ב 1 וברגע שנופלת ההכרעה אם הגענו קודם ל 0 או 100 , התוחלת היא $\frac{1}{100}\cdot 100 + \frac{99}{100}\cdot 0$ שזה גם שווה ל 1.

שאלה 3

יש מחלקה יחידה של מצבים נשנים. המחזור של מצבי המחלקה הוא 2. אם המצב הנשנה הראשון שאליו מגיעים הוא מצב 3 ומגיעים אליו במספר זוגי של צעדים, אז לעולם לא נהיה במצב 5 לאחר מספר זוגי של צעדים. אם המצב הנשנה הראשון שאליו מגיעים הוא 4 או 5 ומגיעים אליו לאחר מספר אי זוגי של צעדים, אז גם לא נהיה אף פעם במצב 5 לאחר מספר זוגי של צעדים. אם לראשונה מגיעים למצב 3 במספר אי זוגי של צעדים או למצבים 4 או 5 במספר זוגי של צעדים, אז פרופורצית הזמן שבה נבלה במצב 5 בצעדים הזוגיים היא 0.7 (כי לאחר כל ביקור במצב 3 עוברים למצב 5 בסיכוי 0.7).
יהי a_1 - ההסתברות שנגיע למצב 3 במספר אי זוגי של צעדים או למצבים 4 ו 5 במספר זוגי של צעדים כאשר מתחילים במצב 1.
יהי a_2 - ההסתברות שנגיע למצב 3 במספר אי זוגי של צעדים או למצבים 4 ו 5 במספר זוגי של צעדים כאשר מתחילים במצב 2.
מתקיימות המשוואות

$$\begin{cases} a_1 = 0.3(1-a_1) + 0.1(1-a_2) + 0.2\cdot 1 + 0.1\cdot 0 + 0.3\cdot 0 \\ a_2 = 0.2(1-a_1) + 0.4(1-a_2) + 0.2\cdot 1 + 0.1\cdot 0 + 0.1\cdot 0 \end{cases}$$

(אם למשל נשארים במצב 1 , אז כעת, בגלל שבזבזנו צעד, צריך מספר אי זוגי של צעדים ל 4 ו 5 או מספר זוגי של צעדים ל 3) מבוקש $0.7a_1$.

שאלה 4
כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם נשנים. לכן אין סוף פעמים נבקר במצב 1. לאחר כל ביקור כזה, בסיכוי חצי נגיע מייד בשלב הבא למצב 0 , וזאת באופן ב"ת בין ביקור לביקור. לכן ההתפלגות היא $G(0.5)$.

הערה
כדי שההתפלגות תהיה גיאומטרית חיוני שעד שנגיע למצב 0 שום ביקור במצב 1 לא יהיה אחרון, כך תמיד תהיה עוד הזדמנות להגיע למצב 0 , אם עד עכשיו לא הגענו אליו. אילו היה מדובר בהילוך שמוטה ימינה, אז יתכן שלא היינו כלל מבקרים במצב 0 , והמשתנה לא היה בכלל מוגדר.

שלומי