<u>פתרון תרגיל 8 במבוא לתהליכים סטוכסטיים</u>

<u>שאלה 1</u>

<u>א.</u> כן

אם עבור כל i מתקיים $P_{i,i+1} = 0.5 = P_{i,i-1}$ אז זהו הילוך מקרי סימטרי שבו כל המצבים נשנים אפס.

<u>ב.</u> לא

מכל מצב יש מסלול (ישיר) לפחות לאחד משכניו. אם המצב הוא נשנה אז הוא ושכנו זה הם באותה מחלקה ונשנות היא תכונה מחלקתית. (לפי סעיף ה', יתכן שאין כלל מצבים נשנים).

<u>ג.</u> כן

נניח שעבור $i \geq 1$ מתקיים $P_{i,i+1} = 0.5 = P_{i,i-1}$, עבור $i = 0$ מתקיים $P_{0,1} = 1$, עבור $i = -1$ מתקיים $P_{-1,0} = 1$, עבור $i \leq -2$ זוגי מתקיים $P_{i,i-1} = 1$ ועבור $i \leq -2$ אי זוגי מתקיים $P_{i,i+1} = 1$.

כך המצבים $i \leq -2$ מחולקים למחלקות של מצבים נשנים חיובית כך שבכל מחלקה יש שני מצבים שכנים. מצב -1 הוא לא ארגודי ולכן חולף והמצבים $i \geq 0$ מהווים מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים אפס (כמו בהילוך מקרי סימטרי, בהסתברות 1 קיים שלב שבו חוזרים לראשית, אך תוחלת זמן החזרה היא אין סוף).

<u>ד.</u> לכל היותר 2

נתן דוגמא לשרשרת שבה יש שתי מחלקות של מצבים נשנים אפס:

עבור $i = 0$, $P_{0,1} = 1$, עבור $i \geq 1$ מתקיים $P_{i,i+1} = 0.5 = P_{i,i-1}$, עבור $i = -1$ מתקיים $P_{-1,-2} = 1$ ועבור $i \leq -2$ מתקיים $P_{i,i+1} = 0.5 = P_{i,i-1}$.

כך האי-שליליים הם מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים אפס וגם השליליים הם מחלקה בלתי פריקה של נשנים אפס.

נראה שלא יכולות להיות יותר משתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים אפס:

במחלקה של מצבים נשנים אפס חייבים להיות אין סוף מצבים (מחלקה סופית אינה נשנת אפס).

על-פי הנתון בשאלה זו, מכל מצב יש מעברים ישירים רק לשכניו. לכן במחלקה אין סופית חייבים להיות כל המצבים החל ממקום מסוים וימינה לו או כל המצבים החל ממקום מסוים ושמאלה לו.

לכן יכולות להיות לכל היותר שתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים אפס.

<u>ה.</u> כן

נניח שעבור $i \geq 0$ מתקיים $P_{i,i+1} = 0.5 = P_{i,i-1}$ ועבור $i \leq -1$ מתקיים $P_{i,i-1} = \frac{2}{3}$ ו $P_{i,i+1} = \frac{1}{3}$.

כל מצבים מהווים מחלקה בלתי פריקה. לכן, אם אחד מהם הוא חולף, אז כולם חולפים.

כמו בהילוך מקרי לא סימטרי, ממצב 0 יכולים לעבור למצב -1 ומשם לא בודאות חוזרים למצב 0.

לכן מצב 0 ואיתו כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם חולפים.

<u>שאלה 2</u>

זה יתכן.

נניח שמתקיים $P(Z = 0) = 0.9$ ו $P(Z = 1000) = 0.1$. כך מתקיים $E(Z) = 100$.

אם מתחילים עם פרט אחד אז כבר בדור הראשון יש היכחדות בסיכוי 0.9 . מצב של הכחדות (אפס פרטים) הוא מצב סופג, זאת אומרת שלא עוזבים אותו לעולם.

שאלה 3

בתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא $\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}>1$.

לכן התהליך לא יכחד בודאות וסיכויי ההכחדות שלו הם הפתרון החיובי הקטן ביותר של המשוואה $t=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot t^2$. הפתרון הזה שווה ל 0.5 .

התהליך ייספג במצב 0 בסיכוי 0.5 ובסיכוי 0.5 ישאף לאין סוף.

מתקיים $(X_0=3)$. לכן אם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ייספג באפס, אז לא עבור n מספיק גדול, לא יתקיים $(X_{Y_n}=1)$.

אם לעומת זאת, תהיה שאיפה לאין סוף, אז יתקיים $(X_{Y_n}=1)$, אם התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יקלט במצב 1.

התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ נקלט בבדיוק אחת מהמחלקות של המצבים הנשנים. מעבר מהמצבים החולפים למצבים נשנים מתקיים רק מממצב 2. לכן סיכויי המעבר למצב 1 ממצבים 2 ו 3 הם שווים. הסיכוי להגיע למצב 1 מקיים $\alpha=0.1\cdot 1+0.2\alpha+0.3\alpha+0.3\cdot 0+0.1\cdot 0$ והוא שווה ל 0.2 .

לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty}P(X_{Y_n}=1)=0.5\cdot 0+0.5\cdot 0.2=0.1$.

שאלה 4

זה לא יתכן.

המשתנה Z יכול מטבעו לקבל רק ערכים שלמים אי שליליים. מכיון שתוחלתו קטנה מ 2 , אז הוא חייב לקבל בהסתברות חיובית את הערכים 0 או 1. מכיון שאת הערך 1 הוא לא מקבל, אז את הערך 0 הוא חייב לקבל בהסתברות חיובית. בשנת 2023 יש בהכרח מספר סופי כלשהו של פרטים. לגבי כל מספר סופי של פרטים, יש הסתברות חיובית שכולם יכחדו אפילו מייד בדור הקרוב (אם למשל יש a פרטים, אז הסיכוי שאף אחד מהם לא יוליד צאצאים הוא $\left(P(Z=0)\right)^a$).

שלומי