

## פתרון תרגיל 9 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

### שאלה 1

המקום הראשון שבו מבקרים החל מ 2000 צריך להיות 2002. המקום הראשון שבו מבקרים החל מ 5000 צריך להיות 5001. בגלל המרחק הרב שבין הנקודות אז שני המאורעות הם כמעט ב"ת. לראשון יש הסתברות של בקירוב  $\frac{1}{3.5} \cdot \frac{4}{6}$  ולשני יש הסתברות של בקירוב  $\frac{1}{3.5} \cdot \frac{5}{6}$ . בגלל שהמאורעות כמעט ב"ת, אז לחיתוך יש הסתברות של בקירוב  $\frac{1}{3.5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3.5} \cdot \frac{5}{6}$ .

### שאלה 2

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \cdot \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \cdot \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

השרשרת לא פריקה. מספר הלקוחות הממוצע שמגיעים ביחידת זמן שרות הוא  $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{4}$  וכך הוא קטן מ 1, לכן השרשרת נישנת חיובית. נחשב את תוחלת זמן החזרה ממצב אפס למצב אפס:

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{8}(E_{1,0} + 1) + \frac{1}{8}(E_{3,0} + 1)$$

$$E_{3,0} = 3E_{1,0}$$

על פי השיויון בין שתי השורות הראשונות אפשר לראות שתוחלות זמני החזרה למצב 0 ממצבים 1 ו 0 הן שוות.

$$E_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{8}(E_{1,0} + 1) + \frac{1}{8}(3E_{1,0} + 1)$$

$$E_{1,0} = 4 \Rightarrow E_0 = 4 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{4}$$

התוצאה הזאת מתאימה לתוצאה המתקבלת לפי הנוסחה  $\pi_0 = 1 - E(Z)$  כאשר  $Z$  הוא המשתנה המייצג את מספר הלקוחות הבאים ביחידת זמן. לשם חישוב הרכיבים המבוקשים של הוקטור הסטציונרי נשתמש בשתי משוואות.

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{3}{8}\pi_0 + \frac{3}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \end{cases}$$

משתי משוואות אלה ומתוצאת החישוב הקודם שעשינו ל  $\pi_0$  נקבל ש  $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{4}$  ,  $\pi_2 = \frac{1}{8}$ .

---

### שאלה 3

התהליך  $Y(t)$  איננו תהליך פואסון כי הוא מדלג על המצבים האי זוגיים. מכל מצב הוא עובר למצב בעל אינדקס גדול ממנו בשניים בקצב שבו התהליך  $X(t)$  עובר למצב העוקב. התהליך  $Y(t)$  הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף שבה לכל מצב של התהליך  $X(t)$  יש שם שונה מהמקורי ( כך כל ההנחות של שרשרת מרקוב בזמן רציף מתקיימות ). התהליך  $Z(t)$  הוא תהליך פואסון שבו קצב המעבר מכל מצב למצב העוקב הוא כפליים הקצב המקורי שב  $X(t)$  . כל תהליך פואסון הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף. התהליך  $W(t)$  אינו תהליך פואסון וגם אינו שרשרת מרקוב בזמן רציף. קצב העזיבה של כל מצב תלוי בזמן. נוח להראות שבזמן 0 ההסתברות לעזוב מצב באינטרוול זמן באורך  $h$  היא  $o(h)$  ולא לינארית באורך האינטרוול.  $P(W(h) > 0) = P(X(h^2) > 0) = \lambda h^2 + o(h^2) = o(h)$ .

---

### שאלה 4

צפו בפתרון [כאן](#).

---

שלומי