פתרון הבחינה מ 13/2/05

שאלה 1

א. ממצבים 1 ו 2 יש מעבר למצבים שמהם אי אפשר לחזור למצבים 1 ו 2. לכן מצבים 1 ו 2 הם חולפים. אם מגיעים למצב 3 אז תמיד נשארים בו. לכן מצב 3 הוא מצב נשנה שמהווה מחלקה בפני עצמו. מצבים 4 ו 5 מהווים מחלקה אי פריקה של מצבים ארגודים בשרשרת סופית. לכן הם מהווים מחלקה של מצבים נשנים.

ב. מצבים 1 ו 2 הם מצבים חולפים לכן $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0$ עבור כל i ו $j=1,2$.

עבור כל i,j ששיכים למחלקות שונות מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0$. מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{3,3}^{(n)} = 1$.

נמצא וקטור הסתברויות סטציונרי במחלקה $\{4,5\}$:

$$\begin{cases} 0.5\pi_5 = \pi_4 \\ \pi_4 + 0.5\pi_5 = \pi_5 \\ \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \pi_4 = \frac{1}{3}, \pi_5 = \frac{2}{3}$$

בנוסף המחלקה $\{4,5\}$ אינה מחזורית, לכן $\lim_{n\to\infty} P_{i,4}^{(n)} = \frac{1}{3}$ ו $\lim_{n\to\infty} P_{i,5}^{(n)} = \frac{2}{3}$ עבור כל $i=4,5$.

נחשב את ההסתברות להגיע ממצבים 1 ו 2 למחלקות השונות. בכל מקרה המעבר מתבצע ממצב 2, לכן סיכויי ההגעה למחלקות השונות לא תלויים בכך אם מתחילים במצב 1 או במצב 2. סיכויי ההגעה למצב 3 הם $\frac{0.3}{0.3+0.2} = 0.6$ ולמחלקה $\{4,5\}$ הם 0.4. לכן למשל, $\lim_{n\to\infty} P_{2,3}^{(n)} = 0.6\cdot 1$ או $\lim_{n\to\infty} P_{1,4}^{(n)} = 0.4\cdot\frac{1}{3}$.

ג. יהיו e_i - תוחלות זמן ההקלטות ממצב i במחלקה של מצבים נשנים. מתקיים:

$$\begin{cases} e_1 = 1 + 0.5e_1 + 0.5e_2 \\ e_2 = 1 + 0.5e_1 + 0.3e_3 + 0.2e_4 \end{cases}$$

כאשר $e_3 = e_4 = 0$ ויש לפתור את המערכת.

ד. בסיכוי 0.6 נבקר במצב 3 ובסיכוי 0.4 נבקר במצבים 4 ו 5. באופן בלתי תלוי בכך, בסיכוי 0.5 נבקר במצב 1 ואז גם במצב 2 (אין תלות בין זמן המעבר למחלקה של מצבים נשנים לבין זהות המחלקה שאליה נגיע). יהי X - מספר המצבים שבהם נבקר.

$P(X=1)=0.3$, $P(X=2)=0.2$, $P(X=3)=0.5\cdot 0.6=0.3$, $P(X=4)=0.5\cdot 0.4=0.2$

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. כדי לחזור ממצב 0 למצב 0 , מספר הצעדים שמאלה צריך להיות שווה לכפליים מספר הצעדים ימינה. לכן ניתן לחזור למצב 0 רק במספר צעדים שהוא כפולה של 3. ניתן לחזור למצב 0 ב 3 צעדים. לכן המחזור של מצב 0 הוא בדיוק 3. השרשרת היא אי-פריקה ובשרשרת אי פריקה לכל המצבים יש את אותו מחזור לכן המחזור של כל המצבים הוא 3.

<u>ב</u>. נשנות היא תכונה מחלקתית. מכיוון שהשרשרת היא אי-פריקה אז די להראות שמצב 0 הוא נשנה.

נשתמש בקריטריון לנשנות. נבדוק האם $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(n)} = \infty$. למעשה ניתן לחזור למצב 0 רק לאחר מספר צעדים שהוא כפולה של 3, לכן יש לבדוק אם מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(3n)} = \infty$. מתקיים

$$P_{0,0}^{(3n)} = \binom{3n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \overset{stirling}{\cong} \frac{\sqrt{2\pi 3n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

ולזה יש סדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}}$. מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ לכן מצב 0 הוא נשנה וכל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

<u>ג</u>. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ לכן מצב 0 לא יכול להיות נשנה חיובי. מצב נשנה שאינו נשנה חיובי הוא נשנה אפס. מכיוון שנשנות אפס היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים בשרשרת האי פריקה הם נשנים אפס. למעשה לא יכול להיות שאיזשהו מצב יהיה נשנה חיובי. התפלגויות זמן החזרה ממצב i לעצמו הן זהות עבור כל מצב i. לכן תוחלות זמני החזרה מכל מצב לעצמו הן שוות. לכן לכל המצבים יש את אותה הסתברות סטציונרית. אך לא יתכן שלכל המצבים יהיו הסתברויות סטציונריות זהות, כי אם זה היה מתקיים אז טור וקטור ההסתברויות הסטציונריות היה מסתכם ב ∞ ולא ב 1. אבל אם יש וקטור הסתברויות סטציונרי אז סכום רכיביו צריך להיות 1.

שאלה 3

א. הרציונלי $\frac{p}{q}$ יכול להתקבל לאחר q נסיונות שמתוכם ב p נסיונות יהיו הצלחות.

ב. נניח שלאחר q_1 נסיונות, הערך 1 התקבל p_1 פעמים. נראה שקיים n כך שבהסתברות חיובית, לאחר $q_2 \cdot 10^n$ נסיונות תתקבל המנה $\frac{p_2}{q_2}$. n יהיה תלוי ב q_1, p_1, q_2, p_2 :

נבחר n כך ש $q_2 \cdot 10^n \geq q_1$ וגם $p_2 \cdot 10^n \geq p_1$ וגם $q_2 \cdot 10^n - p_2 \cdot 10^n \geq q_1 - p_1$.

המנה $\frac{p_2}{q_2}$ יכולה להתקבל לאחר שמתוך $q_2 \cdot 10^n - q_1$ הנסיונות שיבואו לאחר q_1 הנסיונות הראשונים, יתקבל הערך 1 ב $p_2 \cdot 10^n - p_1$ פעמים.

ג. על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים, סדרת המנות $\frac{S_n}{n}$ שואפת ל $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3}$ זה כאן התוחלת של כל אחד מהמשתנים הבלתי תלויים וחסומים). עבור כל $\varepsilon > 0$, מספר הפעמים שתתקבל מנה המרוחקת מ $\frac{1}{3}$ בלפחות ε הוא סופי. כל רציונלי $\frac{p}{q}$ ששונה מ $\frac{1}{3}$ מרוחק מ $\frac{1}{3}$ ב $\varepsilon = \left|\frac{1}{3} - \frac{p}{q}\right|$.

ד. הוכחנו בשאלה 2 שכאשר בכל שלב הולכים שני צעדים ימינה בסיכוי $\frac{1}{3}$ ושמאלה בסיכוי $\frac{2}{3}$, אז השרשרת היא נשנית. לכן חוזרים לנקודת ההתחלה ∞ פעמים. זאת אומרת ש ∞ פעמים תהיה פרופרצית הפעמים שהלכנו ימינה שווה בדיוק ל $\frac{1}{3}$. כך כאן עבור ∞ ערכי n תהיה פרופורצית מספר המשתנים עד אליו שיקבלו את הערך 1 שווה ל $\frac{1}{3}$.

ה. לגבי שרשרת מרקוב הראנו בהרצאה, שנשנות היא תכונה מחלקתית, זאת אומרת שאם שני מצבים מקושרים אז אם אחד מהם הוא נשנה אז גם האחר הוא נשנה. כאן הראנו שיש השתלשלות שמובילה מכל מנה רציונלית בקטע הפתוח $(0,1)$ לכל מנה רציונלית בקטע זה. אך גם הראנו שהמנה $\frac{1}{3}$ מתקבלת אינסוף פעמים בזמן שכל מנה אחרת לא מתקבלת אינסוף פעמים.

ו. $P\left(\frac{S_3}{3} = \frac{2}{3} \mid \frac{S_2}{2} = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} > 0$, $P\left(\frac{S_5}{5} = \frac{2}{3} \mid \frac{S_4}{4} = \frac{1}{2}\right) = 0$ (מדובר בהסתברויות מותנות).

מכאן הסתברות המעבר תלויה בזמן ולא רק במצב: (אין הומוגניות בזמן).

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. לא, התפלגות זמן השרות תלויה בעבר. אם ידוע שבעבר היו באיזשהי נקודת זמן, יותר צרכנים במערכת אז השרת עובד בקצב ממוצע מהיר יותר.

<u>ב</u>. כן, וקטור זה של משתנים מקריים נותן לנו את כל האינפורמציה הנחוצה להמשך.
השרשרת מוגדרת עבור המצבים שבהם $X(t) \le \mu(t)$. עבור כל $k > j$ ממצב (j,k) יש מעבר למצב $(j+1,k)$ בעצמה 1. עבור כל $k = j$ יש מעבר ממצב (j,k) למצב $(j+1,k+1)$ בעצמה 1. עבור כל (j,k) יש מעבר למצב $(j-1,k)$ בעצמה k. אברי האלכסון בכל שורה שווים כמובן למינוס סכום יתר האיברים שבאותה שורה.

<u>ג,ד</u>. כאשר נמצאים בזמן מסוים במצב עם עצמת שירות מסוימת אז מספר המצבים עם עצמת שירות זאת הוא סופי ותמיד יש מסלול למצבים עם מספר שיא חדש של לקוחות במערכת. בשרשרת סופית אי-פריקה , תמיד מגיעים באיזשהו שלב לכל מצב, לכן תמיד נגיע לעצמת שירות שהיא שיא חדש. לכן עצמת השירות תשאף ל ∞ וכאשר זרם המגיעים נשאר קבוע, אז פרופורצית זמן השהות במצב $(X(t)=0)$ תשאף ל 1. אך כאמור בכל קצב קיים נשבור כל שיא קצב באיזשהו שלב, לכן גם נעלה ממצב של צרכן אחד במערכת למצב של שני צרכנים במערכת ∞ פעמים.
<u>הערה</u>: ככל שיתמשך התהליך יקח יותר זמן בממוצע להשיג שיא חדש. השיאים יהיו יותר גדולים וגם השירות יעשה יותר מהיר.

שלומי