

### בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.  
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.  
ענו על כל השאלות. סך כל הנקודות הוא 110. הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .  
נמקו את תשובותיכם.  
בכל מקום בו אתם נדרשים לתת תשובה מדויקת או מקורבת, יש לציין אם תשובתכם היא מדויקת או מקורבת ויש גם לנמק זאת.  
בהצלחה!

#### שאלה 1 (13 נקודות)

תהי  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על כל השלמים, בו בכל שלב הולכים ימינה בסיכוי 0.9 והולכים שמאלה בסיכוי 0.1. נניח שמתחילים במצב 7, מהי תוחלת הזמן עד שלראשונה נגיע למצב 9?

#### שאלה 2 (17 נקודות)

נתונה שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על השריג הדו-מימדי.  
נניח שבכל שלב הולכים צעד אחד ימינה, או צעד אחד שמאלה, או צעד אחד למעלה, בסיכוי  $\frac{1}{3}$  כל אחד, ואף פעם לא למטה. נניח שההילוך מתחיל בראשית.  
יהי  $(X_n, Y_n)$  מיקום הנקודה בשלב ה- $n$ . יהי  $Z_n$  מרחק הנקודה מהראשית בשלב ה- $n$ .  
כך למשל אם  $X_n = 2$  ו  $Y_n = 3$  אז  $Z_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ .  
האם הסדרה  $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$  היא שרשרת מרקוב הומוגנית?

#### שאלה 3 (26 נקודות)

יהי  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  תהליך הסתעפות בו מספר הצאצאים  $Z$  של כל פרט מתפלג לפי  $P(Z=0) = \frac{1}{3}$ ,  
 $P(Z=2) = \frac{2}{3}$ . נניח ש  $X_0 = 1$ .  
נגדיר סדרת מאורעות  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  באופן שלכל  $n$ ,  $A_n = (X_n = 0)$ .  
נגדיר סדרת מאורעות  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  באופן שלכל  $n$ ,  $B_n = (100 \leq X_n \leq 200)$ .

(5) א. מהו בקירוב או בדיוק  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ ? (5) ב. מהו בקירוב או בדיוק  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ ?

(8) א. מהו בקירוב או בדיוק  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$ ? (8) ב. מהו בקירוב או בדיוק  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$ ?

#### שאלה 4 (24 נקודות)

ישנן שתי השערות. ידוע שרק אחת מהן נכונה.

לליאת יש מחברת עבה בת 1001 דפים הממוספרים מ 0 עד 1000. ביום מספר 0, ליאת רושמת בדף מספר 0 את אחת ההשערות, כאשר לכל השערה יש סיכוי שווה להירשם. אחר-כך בכל יום  $i$ ,  $1 \leq i \leq 1000$ , ליאת רושמת בדף  $i$  את אחת ההשערות, תוך שהיא מתחשבת רק בהשערתה מהיום הקודם. ידוע שאם השערתה ביום  $i-1$  היתה נכונה, אז השערתה ביום  $i$  נכונה בסיכוי  $\frac{3}{4}$ , ואם

השערתה ביום  $i-1$  לא היתה נכונה, אז השערתה ביום  $i$  נכונה בסיכוי  $\frac{1}{2}$ . לאחר היום האחרון ליאת

מראה לכל אחד מחבריה חלק מדפי המחברת. כל אחד מהחברים עושה כמיטב יכולתו כדי לקבוע איזו השערה נכונה.

- (5) א. דנה רואה רק את דף מספר 1. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכולה דנה לבחור בהשערה הנכונה?
- (11) ב. פולינה רואה רק את דף מספר 1000. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכולה פולינה לבחור בהשערה הנכונה?
- (4) ג. אדם רואה את כל דפי המחברת. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכול אדם לבחור בהשערה הנכונה?
- (4) ד. אופיר רואה את 501 הדפים בעלי מספר זוגי. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכול אופיר לבחור בהשערה הנכונה?

#### שאלה 5 (30 נקודות)

בכל רגע חלקיק שווה באחד מהמצבים השלמים האי שליליים  $0 \leq i < \infty$ . כאשר החלקיק נמצא במצב  $i$ ,  $1 \leq i < \infty$ , הוא שווה בו זמן המתפלג  $\exp(1)$  ואז עובר למצב 0. כאשר החלקיק נמצא במצב 0, הוא שווה בו זמן המתפלג  $\exp(1)$  ואז עובר למצב  $i$ ,  $1 \leq i < \infty$ , בהסתברות  $0.5^i$ .

- (6) א. מהי התפלגות מספר הביקורים במצב 0 בין שני ביקורים עוקבים במצב 1?
- (6) ב. האם קיימת התפלגות גבולית של סדרת המשתנים המייצגים את מצבי השרשרת בזמני הקפיצות?
- (9) ג. חשבו את  $P_{0,0}(t)$  עבור כל  $t \geq 0$ .
- (9) ד. חשבו את  $P_{0,1}(t)$  עבור כל  $t \geq 0$ .

רמז: בסעיף ד, הפתרון הפשוט הוא ללא פתרון משוואה דיפרנציאלית נוספת.