פתרון מקוצר לבחינה מ 15/08/08

שאלה 1

נסמן ב $e_{i,9}$ את תוחלת מספר הצעדים עד להגעה ממצב i למצב 9.

כדי להגיע ממצב 7 למצב 9 צריך קודם להגיע למצב 8 ומשם למצב 9. לשתי התקופות האלה יש את אותה תוחלת.

$e_{8,9} = 1 + 0.9 \cdot 0 + 0.1 e_{7,9}$ לכן $e_{8,9} = 1 + 0.1 \cdot 2e_{8,9}$ לכן $e_{8,9} = 1.25$ ולכן $e_{7,9} = 2.5$

הערה: מצב 9 הוא חולף לכן לא בהכרח נחזור ממנו אל עצמו. אבל כאשר מתחילים במצב בעל אינדקס נמוך יותר, אז חייבים לעבור דרכו.

שאלה 2

זאת לא שרשרת מרקוב.

$$P\left(Z_4 = 0 \mid Z_0 = 0, Z_1 = 1, Z_2 = \sqrt{2}, Z_3 = 1\right) = 0 \neq P\left(Z_4 = 0 \mid Z_0 = 0, Z_1 = 1, Z_2 = 0, Z_3 = 1\right)$$

מהנקודה $(1,1)$ אין דרך חזרה לראשית. מצד שני אם יתכן שלא עזבנו את ציר ה-X אז יתכן שנחזור לראשית.

לכן ערכו של Z_3 לא נותן את כל האינפורמציה הרלוונטית לגבי התפלגות Z_4. המשתנים הקודמים מוסיפים מידע רלוונטי.

שאלה 3

א. זאת ההסתברות שתהיה הכחדות. בתהליך זה תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא גדולה מ 1.

לכן ההסתברות להכחדות שווה לפתרון שהוא בין 0 ל 1 של המשוואה $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^2$.

פתרון זה הוא $t = \frac{1}{2}$.

ב. אם פעם תהיה הכחדות אז החל מאז תמיד יתקיים $(X_n = 0)$ (0 מצב סופג).

לכן התשובה זהה לתשובה מהסעיף הקודם.

ג. כל המצבים חוץ ממצב 0 הם חולפים לכן הגבול הוא 0 .

ד. אם אין הכחדות אז מספר הפרטים שואף לאינסוף. לפרט לא יכולים להיות יותר משני צאצאים לכן מדור לדור האוכלוסיה אף פעם לא תגדל ביותר מפי 2. לכן אם לא תהיה הכחדות אז יהיה דור שבו יהיו לפחות 100 פרטים אך לא יותר מ 200 פרטים. אם יהיה דור שבו יהיו בין 100 ל 200 פרטים, אז הסיכוי להכחדות הוא אפסי. לכן הסתברות החיתוך של הכחדות וביקור במצבים אלה היא אפסית.

לכן התשובה המקורבת היא ההסתברות שלא תהיה הכחדות שהיא $\frac{1}{2}$.

שאלה 4

א. בשלב 0 ההשערה נכונה בסיכוי $\frac{1}{2}$. בשלב 1 ההשערה נכונה בסיכוי $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

דנה תבחר בהשערה שהיא תראה וסיכויה הם $\frac{5}{8}$.

ב. סדרת ההשערות של ליאת היא שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

זאת היא מטריצה בלתי פריקה ובלתי מחזורית (ניתן לשהות במצב שני צעדים רצופים).
ההסתברות שבשלב ה- 1000 תהיה השערה נכונה, שווה בקירוב להסתברות הסטציונרית של המצב הראשון. ההסתברות הסטציונרית הזאת היא $\frac{2}{3}$. אם פולינה תבחר בהשערה שהיא תראה, אז סיכויה הם בקירוב $\frac{2}{3}$.

ג. במטריצה בלתי פריקה נשנית חיובית, יש התייצבות של השכיחויות של מצבים סביב ההסתברויות הסטציונריות שלהם. לכן ההסתברות שיהיה רוב להשערה הנכונה לאחר פרק זמן ארוך היא בקירוב 1. לכן אם אדם יבחר בהשערה שתופיע יותר אז סיכויו הם בקירוב 1.

ד. השרשרת היא לא מחזורית, לכן גם במקומות הזוגיים יש התייצבות סביב ההסתברות הסטציונרית. לכן גם אופיר יוכל לבחור בהשערה הנכונה בהסתברות שהיא בקירוב 1.

שאלה 5

א. לאחר כל ביקור במצב 0, הסיכוי שנעבור ישירות למצב 1 הוא 0.5 וזאת באופן בלתי תלוי בפעמים האחרות. לכן ההתפלגות היא $G(0.5)$.

ב. השרשרת בזמן הקפיצות היא מחזורית ונשנית חיובית. לכן לא קיימת התפלגות גבולית.
(היא מחזורית כי רק בכפולות של 2 ניתן לחזור למצב. היא נשנית חיובית כי תוך שתי קפיצות חייבים לחזור למצב 0 ונשנות חיובית היא תכונה מחלקתית.)

ג. כל המצבים $i \ge 1$ הם סימטריים ביחס למצב 0. לכן נוכל להסתכל על שרשרת שבה כל המצבים $i \ge 1$ מכווצים למצב בודד. לשרשרת זו יש יצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מתקיים $P_{0,0}'(t) = P_{0,0}(t)(-1) + \left(1 - P_{0,0}(t)\right)\cdot 1$
או $P_{0,0}'(t) = 1 - 2P_{0,0}(t)$ עם תנאי התחלה $P_{0,0}(0) = 1$.

נקבל פתרון $P_{0,0}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$.

ד. לפי הסעיף הקודם, אם מתחילים במצב 0 אז ההסתברות שבזמן t לא נהיה במצב 0 היא $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$. כדי שנהיה במצב 1, צריכה הקפיצה האחרונה ממצב 0 להיות למצב 1. לכן ההסתברות המבוקשת היא $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$.

שלומי