

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם.
אנא השאירו את הדף הראשון של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

שאלה 1 (45 נקודות)

בכל אחד מהסעיפים הבאים רשומים תנאים על מצבים בשרשרת מרקוב.
בכל אחד מהסעיפים עליכם לקבוע ולנמק אם קיימת שרשרת שמצביה עונים על התנאים,
כך שקיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,j}^{(n)}$ עבור זוג מצבים שונים נתונים i, j , ואם קיימת שרשרת
שמצביה עונים על התנאים, כך שלא קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,j}^{(n)}$ עבור זוג מצבים שונים נתונים
 i, j .

כאשר יש שרשרת מתאימה, אז יש לתת דוגמא מפורשת לשרשרת כזאת.
שימו לב שהסתברויות גבוליות יכולות להיות שוות לאפס או למספר חיובי.
שימו לב שבחלק מהסעיפים יתכנו שתי האפשרויות.

א. מצבים בשרשרת סופית.

ב. לא קיימים אף אחד מהגבולות $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,k}^{(n)}$ עבור כל מצב $k \neq j$.

ג. מצב j נשנה חיובי בעל מחזור 3 וניתן להגיע ממצב i למצב j .

ד. שני מצבים שונים חיובית בעלי מחזור שונה.

ה. זוג מצבים שונים ומחזוריים בשרשרת בלתי פריקה בעלת אינסוף מצבים.

שאלה 2 (36 נקודות)

נתונה מערכת תור עם שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. מופע הצרכנים לתור הוא פואסוני בעצמה λ . כאשר יש בתחנה צרכנים אז השרת משרת את אחד מהם. משך שרות מתפלג $\exp(1)$. צרכנים המגיעים למערכת כאשר השרת עסוק מצטרפים לתור הממתינים לשירות.

- א.** מצאו את מטריצת המעבר בזמן הקפיצות של התהליך המתאר את מספר הצרכנים שבמערכת.
- ב.** עבור $\lambda = 1$ מצאו את תוחלת מספר הפעמים שבהן יהיה במערכת בדיוק צרכן אחד, בין שתי פעמים עוקבות שבהן התור יהיה ריק.
- ג.** עבור $\lambda = 1$, יהי $e_{6,11}$ - תוחלת הזמן שעובר מרגע שיש במערכת בדיוק 6 צרכנים עד שיש בה בדיוק 11 צרכנים, יהי $e_{11,6}$ - תוחלת הזמן שעובר מרגע שיש במערכת בדיוק 11 צרכנים עד שיש בה בדיוק 6 צרכנים.
האם $e_{6,11} = e_{11,6}$?
- ד.** עבור אילו ערכי λ , יהיה מספר אינסופי של ערכי t שלמים כך שבפרקי הזמן $(t, t+5)$ לא יגיע לתחנה אף צרכן?

שאלה 3 (27 נקודות)

כל עוד יש באי פרטים אז האוכלוסייה מתפתחת לפי תהליך הסתעפות שבו לכל פרט יש באופן בלתי תלוי בפרטים אחרים שני צאצאים בסיכוי p ואף לא צאצא בסיכוי $1-p$. בכל פעם שאוכלוסיית האי נכחדת, אז כעבור a יחידות זמן (a שלם חיובי) מובא לאי פרט חדש ושוב האוכלוסייה מתחילה להתפתח לפי תהליך הסתעפות בעל אותה חוקיות. נסתכל על התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ המציין את גודל אוכלוסיית הפרטים שבאי ביחידות הזמן השונות.

- א.** עבור אילו ערכי a טבעיים התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב הומוגנית?
- ב.** עבור אילו זוגות ערכים (a, p) המצב של 0 פרטים הוא מצב נשנה בשרשרת מרקוב?
- ג.** עבור אילו ערכים (a, p) יהיה בוודאות קיים דור שבו יהיו בדיוק 1000 פרטים?