פתרון מקוצר לבחינה מ 17/07/09

שאלה 1
נראה שקיימות 9 אפשרויות מתוך $2 \cdot 5 = 10$ אפשרויות (רק בסעיף ד' אפשרות אחת לא תתכן).

א. שרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

בכל שלב, ההסתברות להיות במצב 1 היא 0.5 ולכן ההסתברות הגבולית היא גם 0.5 ולא צריך אפילו להסתמך על שום טענה.
לעומת זאת בשרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שני גבולות חלקיים של 0 ו 1 ולכן לא קיים הגבול.

ב. בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא קיים אף גבול עבור כל זוג מצבים i, j.
בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם j הוא המצב השלישי, אז מכיון שלא ניתן כלל להגיע למצב השלישי ממצבים אחרים אז קיים הגבול אפס עבור כל מצב i אחר. לעומת זאת, עבור כל זוג מצבים אחר אין גבול.

ג. בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא קיים הגבול.
בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר i הוא המצב הראשון ו j הוא למשל המצב השני, קיים הגבול ששווה ל $\frac{1}{3}$.

ד. בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר למשל i הוא המצב הראשון ו j הוא המצב האחרון, אז מכיון שכלל לא ניתן להגיע מ i ל j אז הגבול הוא אפס.

מחזוריות מסוימת היא תכונה מחלקתית. לכן שני מצבים ארגודיים שהם בעלי מחזוריות שונה, אינם מקושרים. לכן בהכרח קיים הגבול אפס.

ה. נסתכל על שרשרת שמצביה הם השלמים האי שליליים. מכל מצב $i > 0$ עוברים בהסתברות 1 למצב 0. ממצב 0 עוברים למצב i בהסתברות 0.5^i עבור כל $i > 0$. כך כשמתחילים במצב 1 אז מבקרים במצב 0 בכל צעד אי זוגי ואין אפשרות לבקר בו בצעדים הזוגיים. כשמתחילים במצב 0 אז בודאות חוזרים אליו לאחר שני צעדים. לכן מצב 0 הוא נשנה. מכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

נסתכל על שרשרת שמצביה הם השלמים האי שליליים ושבה מתקיים עבור כל $i \geq 1$: $P_{i,i-1} = 1$,

מתקיים עבור כל $i \geq 0$: $P_{0,2i+1} = \dfrac{1}{i(i+1)}$ ואין מעברים ישירים ממצב 0 למצבים בעלי אינדקס זוגי. מכל מצב חייבים לחזור למצב 0. לכן מצב 0 הוא מצב נשנה. ממצב 0 יש מסלולים לכל המצבים. מכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים הם נשנים. המחזור של מצב 0 הוא 2 ומכיון שמחזוריות מסוימת היא תכונה מחלקתית אז המחזור של כל המצבים הוא 2.

אם עוברים ממצב 0 למצב $2i+1$ אז לוקח $1 + 2i + 1 = 2i + 2$ צעדים עד חזרה למצב 0.

תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}(2i+2) = \infty$. לכן מצב 0 אינו נשנה חיובי. לכן כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה אינם נשנים חיובית ולכן קיים הגבול ששווה לאפס.

דוגמא נוספת היא ההילוך המקרי הסימטרי על הישר. גם כאן כל המצבים הם בעלי מחזור 2 ונשנים אפס.

שאלה 2

א. ממצב 0 עוברים בוודאות למצב 1.

עבור כל מצב $i \geq 1$: עוברים למצב $i+1$ בהסתברות $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ ועוברים למצב $i-1$ בהסתברות $\frac{1}{1+\lambda}$.

ב. ממצב 0 בודאות עוברים למצב 1. ממצב 1 בסיכוי של $\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ עוברים למצב 0. כל ביקור במצב 1 הוא ביקור אחרון לפני חזרה למצב 0 בסיכוי $\frac{1}{2}$. מצב 1 הוא מצב נשנה, לכן בודאות יש בו אינסוף ביקורים. לכן ההתפלגות היא $G\left(\frac{1}{2}\right)$ והתוחלת היא 2.

ג. לא.

קבוצת המצבים $\{0,1,2,\cdots,10\}$ היא קבוצה סופית של מצבים שממנה יוצאים רק דרך מצב 11. בכל זמן שנמצאים בכל אחד ממצבים אלה יש הסתברות חיובית כלשהי- a שנגיע תוך יחידת זמן אחת למצב 11 (a היא ההסתברות המינימלית המתקבלת על-פני מצבים אלה, שאגב מתקבלת במצב 0). לכן ההסתברות שלא נגיע למצב 11 באיזשהו שלב תוך n יחידות זמן דועכת מעריכית כאשר $n \to \infty$. לכן זמן ההגעה למצב 11 מכל אחד ממצבים אלה, כולל מצב 6 הוא בעל תוחלת סופית.

מכל מצב בעל אינדקס גדול מ 6 הולכים ימינה בסיכוי $\frac{1}{2}$ והולכים שמאלה בסיכוי $\frac{1}{2}$. לכן בדומה למצב בהילוך מקרי סימטרי, תוחלת מספר הקפיצות עד חזרה למצב 6 מכל אחד ממצבים אלה היא אינסופית. מכיון שכל פרק זמן עד קפיצה הוא בעל תוחלת קבועה, אז תוחלת הזמן עד הגעה למצב 6 היא אינסופית.

ד. עבור כל $\lambda > 0$

נוכיח על פי הלמה של בורל קנטלי.

נסתכל על סדרת מאורעות ב"ת. המאורע ה- n יהיה שהחל מהזמן $6n$ ועד הזמן $6n+5$ לא יבוא אף צרכן. מכיון שפרקי הזמן האלה הם זרים, אז המאורעות האלה הם ב"ת. לכל אחד מהם יש הסתברות קבועה שווה. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$. לכן בהסתברות 1 יתרחשו ∞ מאורעות A_n.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. עבור $a=1$

אם $a>1$ אז לאחר שיש הכחדות ממתינים a יחידות זמן עד שמגיע פרט חדש ולכן מתקיים:

$$P\left(X_n=1 \mid X_{n-1}=0, X_{n-2}>0\right)=0$$

אך אם כבר התקבלו $a-1$ ערכי 0 רצופים אז בודאות בפעם הבאה יתקבל הערך 1.

אם $a=1$ אז $P\left(X_n=1 \mid X_{n-1}=0\right)=1$ בלי שום קשר לעבר ועבור ערכים אחרים אין סתירה למרקוביות כי תהליך הסתעפות הוא מרקובי הומוגני.

<u>ב</u>. עבור $a=1$ ו $p\le\frac{1}{2}$

כאשר $p\le\frac{1}{2}$ אז תוחלת מספר הצאצאים אינה גדולה מ 1 ולכן מכל מצב חייבת להיות הכחדות ואינסוף פעמים נחזור ל 0. עבור $p>\frac{1}{2}$ כאשר יש פרט אחד אז יש הסתברות חיובית שלעולם לא תהיה הכחדות.

<u>ג</u>. עבור כל a כאשר $p\le\frac{1}{2}$

ערכו של a לא רלוונטי כאן. ערכו של a רק קובע כמה זמן שוהים במצב 0, אך הוא לא משנה את המעברים ממצב 0. לכן נבדוק עבור $a=1$ ובדיקה זו תתאים לכל ערך a.

כאשר יש הכחדות ודאית אז מצב 0 הוא מצב נשנה ומצב 1000 שמקושר עם מצב 0 הוא גם מצב נשנה. כאשר מתחילים במצב 0 שהוא במחלקה של מצבים נשנים אז מבקרים אינסוף פעמים גם בכל מצב אחר שבמחלקה. כאשר $p>\frac{1}{2}$ אז בדרך לשאיפה לאינסוף יש הסתברות חיובית שלא נבקר במצב 1000. (0 הוא מצב חולף כמו בתהליך הסתעפות רגיל, לכן גם 1000 שמקושר איתו הוא חולף ולכן יש מצבים שמהם לא בודאות מגיעים אי פעם למצב 1000).

שלומי