

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בבחינה זו יש 10 שאלות.
ענו על כל 10 השאלות. משקל כל שאלה הוא 11 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות.
תלמיד הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם.
אנא השאירו את העמוד הראשון של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

שאלה 1

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מיינו את מצבי השרשרת למצבים חולפים ונשנים ולמחלקות אי פריקות של מצבים נשנים.

שאלה 2

מצאו את כל הוקטורים הסטציונרים של השרשרת המתוארת בשאלה 1.

שאלה 3

יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים של כל פרט מקיימת $P(Z=0) = \frac{1}{3}$,

$$P(Z=2) = \frac{2}{3}$$

מצאו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0)$ בהינתן $X_0 = 1$.

מצאו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0)$ בהינתן $X_0 = 3$.

שאלה 4

תנו דוגמא לשרשרת מרקוב שבה 6 מצבים שמהם 3 מצבים הם נשנים ו 3 מצבים הם חולפים.

שאלה 5

נתון תהליך מרקוב בזמן רציף בעל יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

האם התפלגות הזמן שעובר מתחילת התהליך ועד זמן הקפיצה העשירית תלויה בזהות המצב ההתחלתי?

שאלה 6

לגבי השרשרת שתוארה בשאלה 5, מצאו $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,j}(t)$ עבור כל זוג מצבים i, j .

שאלה 7

נתונה מערכת תור של שרת אחד. צרכנים מגיעים למערכת בזרם פואסוני בעל עצמה קבועה λ . ישנו שרת יחיד שיכול בכל נקודת זמן לתת שרות לצרכן בודד. משך זמן השרות של כל צרכן מתפלג $\exp(\mu)$. כל צרכן המגיע למערכת בזמן שהשרת עסוק מצטרף לתור הממתינים לשרות. מצאו מערכת משוואות דיפרנציאליות לחישוב ההסתברויות $P_{2,i}(t)$ עבור כל זמן $t \geq 0$, ועבור כל מצב i , $0 \leq i < \infty$, כאשר מצב i מסמן שיש i צרכנים במערכת. אין צורך לפתור את המערכת.

שאלה 8

האם קיימות שתי שרשרות מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעלות מרחב מצבים סופי זהה, אותה מטריצת מעבר שבה כל המצבים הנשנים הם מקושרים, כך שעבור מצב התחלתי מסוים זהה, ההסתברות שקיים $n > 6$, עבורו $X_n = Y_n$ היא 0.25 בדיוק?

שאלה 9

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את הטענה הבאה:
אם i הוא מצב בשרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית חיובית בעלת מספר בן מניה של מצבים, אז ההסתברות לא לחזור למצב i מעצמו בשום שלב עד השלב ה- n שואפת לאפס מעריכית כאשר $n \rightarrow \infty$.

שאלה 10

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את הטענה הבאה:
לא קיימים תהליכים סטוכסטיים $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך שעבור כל $n \geq 0$:
 $X_n + Y_n = Z_n$ כאשר $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינה שרשרת מרקוב, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינה שרשרת מרקוב, $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב הומוגנית בלתי פריקה ונשנית אפס.