פתרון מקוצר לבחינה מ 14/09/09

שאלה 1

מצב 2 הוא מחלקה בלתי פריקה של מצב סופג. מצב 3 הוא מחלקה בלתי פריקה של מצב סופג.
ממצב 1 יש מסלול (באורך 1) למצב 3 שממנו אין דרך חזרה למצב 1. לכן מצב 1 הוא מצב שאינו ארגודי. מצב שאינו ארגודי הוא בהכרח חולף.

שאלה 2

יש וקטור סטציונרי יחיד של המחלקה $\{2\}$ ויש וקטור סטציונרי יחיד של המחלקה $\{3\}$.
למצב חולף יש תמיד הסתברות סטציונרית 0.
אוסף הוקטורים הסטציונרים הוא $a(0,1,0)+(1-a)(0,0,1)$ עבור כל ערכי a בקטע $0 \le a \le 1$.

שאלה 3

$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ זו ההסתברות להכחדות (אם מגיעים למצב 0 שהוא מצב סופג אז נשארים בו).
מכיון שתוחלת מספר הצאצאים של כל פרט היא גדולה מ 1 אז ההסתברות להכחדות קטנה מ 1.
יהי a - סיכויי ההכחדות בהינתן שמתחילים בפרט אחד.

$$a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

אם מתחילים עם 3 פרטים אז סיכויי ההכחדות הם a^3 כי דרוש ש 3 שושלות יכחדו, כאשר כל אחת מהן נכחדת או לא נכחדת באופן בלתי תלוי באחרות.

שאלה 4

שרשרת מרקוב בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

שלושת המצבים הראשונים הם חולפים כי יש מהם מסלול למצבים שמהם אין דרך חזרה.
שלושת המצבים האחרונים הם נשנים.

<u>שאלה 5</u>

בכל ביקור במצב הראשון, זמן השהות בו מתפלג $\exp(4)$ ובכל אחד משני המצבים האחרים זמן השהות בכל ביקור מתפלג $\exp(1)$. מהמצב הראשון כמובן שעוברים לאחד משני המצבים האחרים. מכל אחד משני המצבים האחרים עוברים בהכרח ישירות למצב הראשון. כך בעשרת השהויות הראשונות בהכרח יש 5 שהויות במצב הראשון ו 5 שהויות במצבים האחרים. לכן בכל מקרה הזמן עד הקפיצה העשירית מתפלג כסכום של עשרה משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים ש 5 מהם מתפלגים $\exp(4)$ ו 5 מהם מתפלגים $\exp(1)$.

<u>שאלה 6</u>

עבור כל $0 \le j \le 3$ מתקיים עבור כל $0 \le i \le 3$: $\lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t) = \pi_j$ כאשר π_j הוא הרכיב ה- j בוקטור הסטציונרי היחיד של השרשרת.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

מתקבל וקטור הסתברויות סטציונרית: $\pi_3 = \frac{1}{5} \quad , \quad \pi_2 = \frac{3}{5} \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{5}$

<u>שאלה 7</u>

$P_{2,0}'(t) = \mu P_{2,1}(t) - \lambda P_{2,0}(t)$

ועבור כל $1 \le i < \infty$: $P_{2,i}'(t) = \lambda P_{2,i-1}(t) + \mu P_{2,i+1}(t) - (\lambda + \mu) P_{2,i}(t)$

תנאי התחלה: $P_{2,2}(0) = 1$ ועבור כל $i \ne 2$: $P_{2,i}(0) = 0$

שאלה 8

נתן דוגמא למטריצת מעבר של שרשרת כזאת בת 5 מצבים:

	1	2	3	4	5
1	0	0.25	0.25	0.25	0.25
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	1	0	0	0

מצב 1 הוא מצב חולף. כל יתר המצבים הם מחלקה אחת בעלת מחזור 4.
נניח שמצב 1 הוא המצב ההתחלתי. אם ממנו שני התהליכים עוברים לאותו מצב אז אחר-כך בכל שלב הם יהיו באותו מצב. אם ממצב 1 שני התהליכים עוברים למצבים שונים אז הם כבר לעולם לא יפגשו.
שני התהליכים עוברים ממצב 1 לאותו מצב בסיכוי 0.25 .

שאלה 9

נתן דוגמא שתפריך את הטענה.
נתונה שרשרת מרקוב שמרחב מצביה הוא השלמים האי שליליים. מטריצת המעבר מקיימת:
$P_{i,i-1}=1$ עבור כל $i \ge 1$, $P_{0,i}=\frac{c}{i^3}$ עבור כל $i \ge 1$, כאשר $c=\frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} i^3}$ כך שסכום ההסתברויות לעבור ממצב 0 למצבים השונים מסתכם ב 1.
מצב 0 הוא מצב נשנה כי חייבים לחזור אליו מכל מצב אחר.
נראה שתוחלת זמן החזרה ממצב 0 לעצמו היא סופית ולכן מצב 0 הוא מצב נשנה חיובי.
אם עוברים ממצב 0 למצב i אז בהכרח עוברים $i+1$ צעדים עד חזרה למצב 0.
מתקיים: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c}{i^3}(i+1)<\infty$ ולכן תוחלת זמן החזרה היא סופית.

ההסתברות לחזור למצב 0 לראשונה לאחר יותר מ n צעדים היא $\sum_{i=n}^{\infty}\frac{c}{i^3}$ וזה גדול מ $\frac{c}{n^3}$

(למעשה זה בסדר גודל של $\frac{c}{n^2}$, אך לא נזדקק לסדר הגודל המדויק).

הפונקציה $\frac{c}{n^3}$ לא שואפת לאפס מעריכית.

שאלה 10

נראה שקיימים תהליכים כאלה.

קבוצת המצבים היא כל השלמים. $X_0 = Y_0 = 0$,

$$P(X_1 = 1, Y_1 = 0) = P(X_1 = -1, Y_1 = 0) = P(X_1 = 0, Y_1 = 1) = P(X_1 = 0, Y_1 = -1) = \frac{1}{4}$$

אם $(X_1 \neq 0)$ אז $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא הילוך מקרי סימטרי ו $Y_n = 0$ לכל $0 \le n < \infty$.

אם $(Y_1 \neq 0)$ אז $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא הילוך מקרי סימטרי ו $X_n = 0$ לכל $0 \le n < \infty$.

בכל מקרה $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא הילוך מקרי סימטרי שהוא נשנה אפס.

מתקיים $P(X_9 = 1 \mid X_8 = 0) \neq 0$ כי יתכן ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא הילוך מקרי סימטרי שבשלב 8 הגיע לראשית. אך $P(X_9 = 1 \mid X_8 = 0, X_1 = 0) = 0$ כי $X_1 = 0$ אומר ש $X_n = 0$ לכל $0 \le n < \infty$.

לכן $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינו מרקובי. באותה צורה ניתן להראות ש $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינו מרקובי.

שלומי