

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בבחינה זו יש 4 שאלות. ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
בראש כל שאלה רשום הניקוד שלה. בכל שאלה, יש לכלל הסעיפים אותו משקל.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

שאלה 1 (24 נקודות)

יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים של כל פרט מקיימת

$$P(Z=0) = P(Z=1) = \frac{3}{8}, \quad P(Z=2) = \frac{1}{4}$$

יהי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים של כל פרט מקיימת

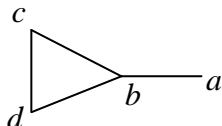
$$P(W=0) = P(W=1) = P(W=2) = \frac{1}{3}$$

נניח ששני התהליכים $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם בלתי תלויים.

- א. מהי ההסתברות שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ייכחד בהינתן $(X_0 = 1)$?
- ב. מהי ההסתברות שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ייכחד בהינתן $((X_0 = 2) \cap (X_8 > 0))$?
- ג. מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > X_n)$ בהינתן $((X_0 = 1) \cap (Y_0 = 1))$?
- האם השתמשתם בהנחת האי תלות שבין התהליכים ?

שאלה 2 (24 נקודות)

מבצעים הילוך מקרי על הגרף הלא מכוון בעל ארבעת הצמתים $\{a, b, c, d\}$



- (בכל שלב כאשר נמצאים בצומת אז בוחרים באקראי בסיכוי שווה את אחד משכניו ועוברים אליו).
נניח שמתחילים בצומת a .
מהי תוחלת מספר הצעדים עד שנחזור לראשונה שוב לצומת a ?
תנו פתרונות בשלוש דרכים שונות.

שאלה 3 (32 נקודות)

שאלה זו עוסקת בשרשרות מרקוב בנות חמישה מצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ובמטריצות המעבר שלהן שיש להן כמובן 25 איברים. הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות:

- א.** אם יש בשרשרת ארבעה מצבים חולפים אז יש במטריצה לכל היותר עשרים איברים חיוביים.
ב. לא קיימת מטריצה כזאת שבה בדיוק שישה איברים הם חיוביים והשרשרת היא בלתי פריקה ובלתי מחזורית.
ג. אם יש במטריצה בדיוק חמישה איברים חיוביים אז קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(5n)}$.
ד. אם יש במטריצה פחות משמונה אפסים אז קיימות כל ההסתברויות הגבוליות $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,i}^{(n)}$ עבור כל $1 \leq i \leq 5$.

שאלה 4 (28 נקודות)

נתונה מערכת תור של שני שרתים. צרכנים מגיעים למערכת בזרם פואסוני בעל עצמה $\lambda = 2$. כל שרת יכול בכל נקודת זמן לשרת לכל היותר צרכן אחד. משך זמן שרות מתפלג $\exp(1)$. כל צרכן שמגיע למערכת פונה לאחד השרתים. כאשר שרת זה עסוק הצרכן מצטרף לתור הממתינים לשרות אצל שרת זה (לכל שרת יש קבוצת ממתינים נפרדת). צרכן המגיע למערכת כאשר לשרת הראשון יש בדיוק 8 ממתינים, פונה בהכרח לשרת השני. צרכן המגיע כאשר אצל השרת הראשון אין בדיוק שמונה ממתינים, פונה בהכרח לשרת הראשון. יהי $X(t)$ - המספר הכולל של הנמצאים בזמן t בהמתנה או בשירות אצל השרת הראשון. יהי $Y(t)$ - המספר הכולל של הנמצאים בזמן t בהמתנה או בשירות אצל השרת השני. נניח שבזמן $t = 0$ המערכת ריקה.

- א.** האם רצף המשתנים המקריים $X(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף?
האם רצף המשתנים המקריים $Y(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף?
ב. האם $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = 0) > 0$? האם קיים $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty$?
האם $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) = 0) > 0$? האם קיים $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \infty$?