

מועד א' סמסטר ב' תשע"א
11/07/11

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את הדף הראשון של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

שאלה 1 (45 נקודות)

שאלה זו עוסקת בשרשרות מרקוב הומוגניות שמרחב המצבים שלהן הוא כל השלמים (חיובים, שליליים ואפס).
נניח שמתקיים:

$$P_{8,9} = a = 1 - P_{8,7}$$

עבור כל i שהם כפולה שלמה (חיובית, שלילית או אפס) של 3: $P_{i,i+1} = b = 1 - P_{i,i-1}$
ועבור כל i אחרים: $P_{i,i+1} = c = 1 - P_{i,i-1}$.

בכל אחד מהמקרים הבאים עליכם לקבוע ולנמק לגבי כל מצב בשרשרת אם הוא נשנה חיובי, נשנה אפס או חולף.
מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה.

א. $b = c = 0.6$, $a = 1$

ב. $b = c = 0.4$, $a = 1$

ג. $b = c = 0.5$, $a = 0.6$

ד. $b = 0.7$, $a = c = 0.5$

ה. $b = 0.7$, $a = c = 0.4$

שאלה 2 (36 נקודות)

כאשר ליאת לא גולשת אז כעבור זמן המתפלג $\exp(1)$ היא מתחילה לגלוש.
כאשר ליאת מתחילה לגלוש אז כעבור זמן המתפלג $\exp(1)$ היא מפסיקה לגלוש.
כאשר דנה לא גולשת אז כעבור זמן המתפלג $\exp(1)$ היא מתחילה לגלוש.
כאשר דנה מתחילה לגלוש אז כעבור זמן המתפלג $\exp(1)$ היא מפסיקה לגלוש.
כאשר אילה לא גולשת אז כעבור זמן המתפלג $\exp(1)$ היא מתחילה לגלוש והיא לא מפסיקה לעולם לגלוש.
ההתנהגות של כל אחת משלושתן בלתי תלויה בעבר ובהתנהגות שתי האחרות.

יהי $X(t)$ - מספר הגולשות בזמן t מבין ליאת ודנה.
יהי $Y(t)$ - מספר הגולשות בזמן t מבין ליאת ואילה.

$$X(0) = Y(0) = 0$$

- א.** האם רצף המשתנים $X(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף? אם כן, אז מצאו את היוצר האניפיניטיסימלי של תהליך זה. אם לא, אז נמקו זאת.
- ב.** האם רצף המשתנים $Y(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף? אם כן, אז מצאו את היוצר האניפיניטיסימלי של תהליך זה. אם לא, אז נמקו זאת.
- ג.** מצאו מערכת משוואות לחישוב תוחלת הזמן הראשון שבו $X(t) = 2$. אין צורך לפתור את מערכת המשוואות.
- ד.** מצאו מערכת משוואות לחישוב תוחלת הזמן הראשון שבו $Y(t) = 2$. אין צורך לפתור את מערכת המשוואות.

שאלה 3 (27 נקודות)

יהיו i, j זוג מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית.
הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות:

- א.** אם ידוע שכאשר מתחילים במצב i אז יש הסתברות חיובית לבקר במצב j לפחות פעם אחת, אז בהכרח כאשר מתחילים במצב i יש הסתברות חיובית לבקר במצב j לפחות חמש פעמים.
- ב.** אם ידוע שכאשר מתחילים במצב i אז יש הסתברות חיובית לבקר במצב j לפחות חמש פעמים, אז בהכרח כאשר מתחילים במצב i יש הסתברות חיובית לבקר במצב j אינסוף פעמים.
- ג.** אם ידוע שמצב j הוא מצב מחזורי, אז לא יתכן שקיים $P_{i,j}^{(n)} > 0$ לכל $n \geq 1$ שלם.