<u>**פתרון מקוצר לבחינה מ 11/07/11**</u>

<u>**שאלה 1**</u>

<u>**א.**</u> כל המצבים הם חולפים.
קבוצת המצבים $5,6,7,\cdots$ הם לא ארגודיים (יש מהם מסלולים למצב 8 שממנו אין חזרה אלהם).
לכן מצבים אלה הם חולפים.
ממצב 8 עוברים למצב 9 שממנו לא חוזרים בודאות למצב 8 (כמו שבהילוך מקרי לא סימטרי שבו $P_{i,i+1} > 0.5$ לא בודאות חוזרים ממצב $i+1$ למצב i). לכן מצב 8 הוא חולף ולכן גם כל המצבים במחלקה הבלתי פריקה $8,9,10,\cdots$ הם חולפים.

<u>**ב.**</u> מצבים $5,6,7,\cdots$ הם חולפים ומצבים $8,9,10,\cdots$ הם נשנים חיובית.
שוב $5,6,7,\cdots$ הם לא ארגודיים ולכן הם חולפים. <u>הערה</u>: כשמתחילים בהם או שמגיעים ל 8 או ששואפים ל $-\infty$.
תוחלת מספר הצעדים לחזרה ממצב 8 לעצמו היא סופית (ממצב 8 בהכרח עוברים למצב 9 ומתקיים $e_{9,8} = 1 + 0.6 \cdot 0 + 0.4 e_{10,8}$ כאשר $e_{10,8} = e_{10,9} + e_{9,8} = 2e_{9,8}$). לכן מצב 8 הוא נשנה חיובי ואיתו כל המצבים במחלקה הבלתי פריקה הם נשנים חיובית.

<u>**ג.**</u> כל המצבים הם נשנים אפס.
ממצב 8 עוברים למצבים 7 או 9. מכל אחד מהם חוזרים בהסתברות 1 באיזשהו שלב למצב 8 , אך תוחלת מספר הצעדים עד חזרה היא ∞ (כמו בהילוך מקרי סימטרי על הישר). לכן מצב 8 ואיתו כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם נשנים אפס.

<u>**ד.**</u> כל המצבים הם חולפים.
שכיחות הביקורים במצבים שהם כפולות של 3 היא גדולה מ 0 וקטנה מ 1. בפעמים שבהן שוהים במצבים אלה, שכיחות הצעדים ימינה שואפת ל 0.7 (לפי החוק החזק). בזמני הביקורים במצבים אחרים, שכיחות הצעדים ימינה שואפת ל 0.5 . לכן חוץ מממספר סופי של פעמים, שכיחות מספר הצעדים ימינה גדולה מ 0.5 . לכן לגבי כל מצב התחלתי, נחזור אליו רק מספר סופי של פעמים.

<u>**ה.**</u> כל המצבים הם חולפים.
תנאי הכרחי לכך שהמצבים בשרשרת הבלתי פריקה יהיו נשנים הוא ששכיחות הביקורים במצבים שהם כפולות של 3 תשאף ל $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3}\cdot 0.7 + \frac{2}{3}\cdot 0.4 = 0.5$ ורק כך נמנע סחף). נסתכל על שרשרת עזר שבה יש שלושה מצבים. 0- ביקור במצבים שהם כפולה של 3, 1- ביקור במצבים עם שארית חלוקה ב 3 של 1, 2- ביקור במצבים עם שארית חלוקה ב 3 של 2 : מטריצת המעבר של שרשרת זו היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

לשרשרת זו אין וקטור סטציונרי שבו $\pi_0 = \frac{1}{3}$. אפשר לראות זאת על-ידי פתירת מערכת משוואות.

אבל, ניתן גם לחסוך את המאמץ הזה. אילו היה מתקיים $\pi_0 = \frac{1}{3}$ אז היה מתקיים

ולכן היה צריך $\pi_0 = 06\pi_1 + 0.4\pi_2$, אך גם לפי אחת המשוואות מתקיים $\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$
להתקיים $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2$. אך זה אינו פתרון של המערכת כולה.

<u>הסבר אלטרנטיבי</u> (בקיצור רב)

ניתן על-ידי פתירת מערכת משוואות לקבל מסקנה שההסתברות להגיע ממצב $3i$ למצב $3i+3$ לפני שמגיעים למצב $3i-3$ אינה שווה לחצי. לכן יש סחף לאחד הכיוונים.

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. היוצר:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>ב</u>. זו לא שרשרת מרקוב

אם $Y(t)=1$ אז העבר מוסיף אינפורמציה רלוונטית. אם למשל באיזשהו שלב $t_1 < t$ היה כבר $Y(t_1)=2$ אז ברור שבזמן t אילה גולשת ולכן כבר לא נגיע אף פעם בהמשך למצב 0.
אם לעומת זאת לא היה אף רגע $t_1 < t$ שבו $Y(t_1)=2$ אז יתכן שליאת גולשת בזמן t ואילה לא גולשת בזמן זה. כך נוכל עדיין להגיע למצב 0 בהמשך.

<u>ג</u>. $e_{0,2}$ - תוחלת זמן ההגעה למצב 2 כאשר נמצאים במצב 0.

$e_{1,2}$ - תוחלת זמן ההגעה למצב 2 כאשר נמצאים במצב 1 (שבו בדיוק אחת מהן צופה בטלביזיה).

$$\begin{cases} e_{0,2} = \frac{1}{2} + e_{1,2} \\ e_{1,2} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2}e_{0,2} + \frac{1}{2}\cdot 0 \end{cases}$$

<u>ד</u>. נגדיר שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4\}$:

מצב 1- אף אחת משתיהן לא גולשת. מצב 2- רק ליאת גולשת.
מצב 3- רק אילה גולשת. מצב 4- שתיהן גולשות.
לשרשרת זו יש יוצר

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$e_{1,4}$ - תוחלת זמן ההגעה למצב 4 כאשר אף אחת מהן לא גולשת.

$e_{2,4}$ - תוחלת זמן ההגעה למצב 4 כאשר רק ליאת גולשת.

$e_{3,4}$ - תוחלת זמן ההגעה למצב 4 כאשר רק אילה גולשת.

$$\begin{cases} e_{1,4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e_{2,4} + \frac{1}{2}e_{3,4} \\ e_{2,4} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2}\cdot e_{1,4} + \frac{1}{2}\cdot 0 \\ e_{3,4} = \frac{1}{1} \end{cases}$$

<u>שאלה 3</u>

בכל אחד מהסעיפים נתן דוגמא שמפריכה את הטענה.

<u>א</u>. שרשרת על כל השלמים שבה $P_{i,i+1} = 1$. ממצב 0 בהכרח מגיעים למצב 1 בדיוק פעם אחת.

<u>ב</u>. הילוך מקרי על הישר שבו $P_{i,i+1} = 0.8 = 1 - P_{i,i-1}$. בכל מצב ניתן לבקר כל מספר סופי של פעמים. אבל, כל המצבים הם חולפים ולכן לא קיים מצב שניתן לבקר בו אינסוף פעמים בהסתברות חיובית.

<u>ג</u>. שרשרת בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ממצב 1 ניתן להגיע למצב 2 במספר זוגי או אי זוגי של צעדים. מתקיים $P_{1,2}^{(n)} = 0.5$ לכל $n \geq 1$.

שלומי