פתרון מקוצר לבחינה מ 11/10/11

שאלה 1

א נתן דוגמא נגדית.
שרשרת מרקוב מחזורית בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ב נוכיח את הטענה.
עבור כל מצב i חולף מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i) < \infty$. לכן אילו כל המצבים $1 \le i \le 16$ היו חולפים
אז היה מתקיים $\sum_{i=1}^{16}\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i) < \infty$. זו סתירה לכך שמכיון ש $E(X_n) < 8$ לכל n, אז
מתקיים לפי אי שיוויון מרקוב $P(X_n \le 16) > 0.5$ לכל n.
בכל שלב יש סיכוי של לפחות חצי שנבקר במצבים שבין 1 ל 16.
לגבי מצב חולף, סכום ההסתברויות לבקר בו בשלבים השונים הוא סופי. לכן, קיים שלב שהחל ממנו סכום ההסתברויות לבקר במצב קטן מלמשל 0.01 (זנב של טור מתכנס). לכן קיים שלב שהחל ממנו סכום ההסתברויות לבקר בכל אחד ממצבים אלה קטן מ 0.01 (המכסימום של 16 מקומות).
החל משלב זה סכום ההסתברויות לבקר באיזשהו מצב מאלה קטן מ 0.16 ולכן ההסתברות שבשלב מסוים כזה נבקר במצבים אלה קטנה מ 0.16 וזאת בניגוד לכך שבכל שלב יש סיכוי של לפחות חצי שנבקר במצבים אלה.

ג נתן דוגמא נגדית.
שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

מתקיים עבור כל $n \ge 0$:

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= P(X_{n+1} = 1)\cdot 1 + P(X_{n+1} = 2)\cdot 2 = \\ &= P(X_{n+1} = 1)\cdot 1 + P(X_{n+1} = 2)\cdot 1 + P(X_{n+1} = 2)\cdot 1 = \\ &= 1 + P(X_{n+1} = 2) = 1 + 0.1(1 - P(X_n = 2)) + 0.5P(X_n = 2) = 1.1 + 0.4P(X_n = 2) \end{aligned}$$

ומכיון ש $P(X_1 = 2) > P(X_0 = 2) = 0$ אז נקבל באינדוקציה
ש $1.1 + 0.4P(X_n = 2) > 1.1 + 0.4P(X_{n-1} = 2)$ לכל $n \ge 1$, כך סדרת התוחלות היא מונוטונית עולה. אך זו שרשרת בלתי פריקה של מצבים נשנים.
ההסתברות להיות במצב 2 עולה עם הזמן, ולכן התוחלת עולה. אבל מצב 1 אינו מצב חולף. את העובדה שההסתברויות להיות במצב 2 עולות, מוכיחים באינדוקציה.

ד נתן דוגמא נגדית.
הדוגמא תהיה של שרשרת בלתי פריקה ונשנית אפס על הטבעיים.

$P_{1,2}=1$ ועבור כל $i\ge 2$: $P_{i,i-1}=0.5=P_{i,i+1}$. עבור כל מצב i מתקיים $\lim_{n\to\infty}P(X_n=i)=0$
כל אחד מהמצבים הוא בעל הסתברות גבולית של אפס (בגלל היותו נשנה אפס). ההסתברות הגבולית של להיות במצב שלא גדול מ a היא אפס כסכום של מספר סופי של גבולות של אפס.

ה נתן דוגמא נגדית.
שרשרת מרקוב בלתי פריקה על כל החזקות (חיוביות, שליליות ואפס) של 2.
נניח שמתקיים $P(X_{n+1}=2t\mid X_n=t)=0.2=1-P(X_{n+1}=0.5t\mid X_n=t)$
$$E(X_{n+1})=0.2E(2X_n)+0.8E(X_n/2)=0.8E(X_n)$$
שימו לב שאילו היינו בוחרים למשל $\frac{1}{3}$ במקום 0.2 אז הגבול של התוחלות לא היה 0, למרות שגם במקרה זה יש שאיפה של המשתנים ל 0 בהסתברות 1.
יש מסלול מכל מצב לכל מצב ולכן השרשרת היא בלתי פריקה. יש כאן סחף לכיוון אפס. המשתנים שואפים לאפס.
מה שהראנו הוא שסדרת התוחלות יורדת לאפס (תוחלת של כל משתנה היא 0.8 כפול התוחלת של הקודם לו).

שאלה 2
תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט גדולה מ 1. בהינתן $(X_0=1)$, הסתברות ההכחדות היא הפתרון החיובי הקטן של המשוואה $t=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^2$. פתרון זה הוא $t=0.5$.

א אם $(X_0=2)$ אז הסתברות ההכחדות היא 0.5^2 . לכן התשובה היא $0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 0.5^2$

ב בהינתן ערכו של X_3, כל המידע על ההיסטוריה הקודמת יותר אינו רלונטי. לכן סכויי ההכחדות הם 0.5^6 .

ג
$$\frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4+2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$$

שאלה 3
א לפי התכונות של זרם פואסוני מתפצל, זרם המגיעים לעידו הוא פואסוני עם עצמה 1. מתקיים:
$\Lambda_{0,1}=1$, $\Lambda_{0,0}=-1$ ועבור כל $i\ge 1$: $\Lambda_{i,i-1}=\Lambda_{i,i+1}=1$ ו $\Lambda_{i,i}=-2$.
(ניתן לראות לפי התכונות של תהליך פואסון, שזרם המגיעים לעידו הוא תהליך פואסון עם עצמה 1).

ב נראה ש $\lim_{n\to\infty}P(X(t)=0)=0$.
$X(t)$ היא שרשרת של תור עם שרת יחיד המשרת בקצב 1 שאליו מגיעים לקוחות בקצב של 1, כאשר יש אינסוף מקומות המתנה. לשרשרת בלתי פריקה זו אין וקטור סטציונרי.

ג בגלל התכונות של זרם פואסוני מתפצל, זרם המגיעים לכל כספר הוא פואסוני בעצמה 1 ויש אי תלות בין הקורה אצל כספרים שונים. כאשר בתהליך המשקף את הקורה בכל הסניף יש n קפיצות, אז

בתהליך המשקף את הקורה אצל כל כספר בנפרד יש גם סדר גודל של n קפיצות. כך ההסתברות שכספר מסוים פנוי מתנהגת כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (זהו סדר הגודל של ההסתברות לחזור לראשית לאחר מספר זוגי של צעדים בהילוך מקרי סימטרי על הישר, מכיון שכאן מהמצבים הטבעיים עוברים לכל אחד מהשכנים בסיכוי שווה, והתפלגות זמן השהות בכל טבעי היא שווה, אז הקורה בזמני הקפיצות משקף את הקורה לאורך זמן). התהליך המתאר את הקורה אצל כל כספר הוא שרשרת מרקוב הומוגנית.

מכיון ש $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ אז אינסוף פעמים יהיה כספר אחד פנוי.

מכיון שהתהליך המתאר את מספר הלקוחות הנמצאים אצל זוג כספרים הוא שרשרת מרקוב ומכיון ש $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \infty$ אז אינסוף פעמים יהיו שני כספרים פנויים.

מכיון ש $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 < \infty$ אז רק במספר סופי של פעמים יהיו שלושה כספרים פנויים.

ד אף פעם לא יגיעו שני לקוחות בדיוק באותה נקודת זמן. מכיון שכל לקוח יפנה לכספר שאצלו נמצאים מספר מכסימלי של לקוחות, אז אף פעם לא יהיה יותר מכספר אחד עסוק. כך המערכת לא תעמוד בקצב המגיעים. כך ישאף מספר הלקוחות הנמצאים אצל אחד הכספרים ל ∞.

משיקולי סימטריה נקבל $\lim_{t\to\infty} P(X(t)=0) = \frac{2}{3}$.

שלומי