

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

שאלה 1 (45 נקודות)

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות.

- א. לא יתכן שקיים מצב חולף j בשרשרת מרקוב כך ש $P_{i,j}^{(n)} = 0$ לכל מצב i ולכל $n \geq 1$.
- ב. לא יתכן שקיים מצב נשנה אפס j בשרשרת מרקוב כך ש $P_{i,j}^{(n)} = 0$ לכל מצב $i \neq j$ ולכל $n \geq 1$.
- ג. לא יתכן שבשרשרת מרקוב, ההסתברות שעבור מצב התחלתי i נגיע אי פעם למצב נשנה כלשהו בהסתברות 0.5.
- ד. לא יתכן שבשרשרת שכל מצביה חולפים, קיים עבור כל $\varepsilon > 0$ מצב i , כך שההסתברות לחזור אליו אי פעם לאחר שמתחילים בו גדולה מ $1 - \varepsilon$.
- ה. לא קיימת שרשרת מרקוב שבה במטריצת המעבר כל האיברים חיוביים וקיים בה וקטור סטציונרי שלא מקיים את תנאי האיזון המפורט.

שאלה 2 (27 נקודות)

נתון תהליך הסתעפות $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שבו התפלגות מספר הצאצאים נתונה על-ידי

$$P(Z = 0) = \frac{1}{3} = 1 - P(Z = 2)$$

- א. מהי ההסתברות להכחדות בהינתן $(X_0 = 1)$?
- ב. מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n+1} > X_n)$ בהינתן $(X_0 = 1)$?
- ג. מהו $P(X_2 = 2)$ בהינתן $(X_0 = 1)$?

שאלה 3 (36 נקודות)

בתחנת שרות יש שני שרתים שכל אחד מהם יכול בכל נקודת זמן לתת שרות לכל היותר לצרכן אחד. כמו כן יש אצל כל אחד מהם אינסוף מקומות המתנה. משך זמן שרות אצל כל אחד מהשרתים מתפלג $\exp(1)$. לתחנה מגיעים צרכנים בזרם פואסוני בעל עוצמה 3. כל צרכן שמגיע לתחנה פונה תחילה לקבלת שרות אצל שרת א'. כל צרכן שמשורת על-ידי שרת א' נשאר בתחנה עד סיום שרותו אצל שרת א'. אך כל צרכן שנמצא בתור הממתינים לשרות אצל שרת א', עלול להתיאש ולעבור לקבלת שרות אצל שרת ב'. כל צרכן שממתין בתור לקבלת שרות אצל שרת א', עובר בפרק זמן באורך h בהסתברות $h + o(h)$ לתור של שרת ב'. אם בשום שלב הוא לא מתייאש, אז הוא משורת על-ידי שרת א'. כל מי שמגיע לתור של שרת ב' מתמיד בו עד סיום שרותו בתחנה.

יהי $X(t)$ - מספר הצרכנים הנמצאים בזמן t אצל שרת א'.
יהי $Y(t)$ - מספר הצרכנים הנמצאים בזמן t אצל שרת ב'.
יהי $Z(t)$ - המספר הכולל של הצרכנים הנמצאים בתחנה בזמן t .

נניח ש $Z(0) = 0$

א. מהו $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z(t) = 0)$?

- ב.** האם אוסף המשתנים המקריים $X(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?
- ג.** האם אוסף המשתנים המקריים $Y(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?
- ד.** האם אוסף המשתנים המקריים $Z(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?