

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים
המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

שאלה 1 (45 נקודות)

מבצעים סדרה אין סופית של הטלות בלתי תלויות של קוביה שנופלת על כל פאה בסיכוי שווה, על שתיים מפאות הקוביה כתוב 1, על שתיים מפאותיה כתוב 2 ועל שתיים מפאותיה כתוב 3. יהי S_n הסכום המצטבר ב n ההטלות הראשונות. יהי Z_n שארית החלוקה של S_n ב 3.

כך למשל אם בארבעת ההטלות הראשונות מתקבלות התוצאות 3,2,1,3 אז $S_4 = 3 + 2 + 1 + 3 = 9$, וכך למשל אם $S_n = 12$ אז $Z_n = 0$ ואם $S_n = 14$ אז $Z_n = 2$.
נסתכל על שרשרת מרקוב $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעלת מרחב המצבים $\{0,1,2\}$.

א. מצאו את מטריצת המעבר של השרשרת $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$.

ב. מצאו את $P(Z_3 = 1)$.

ג. מצאו את תוחלת זמן החזרה של התהליך $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ממצב 0 למצב 0.

ד. יהי A המאורע שיהיה קיים שלב n שבו $(S_n = 1002)$, אך לא יהיה קיים שלב n שבו $(S_n = 1000)$ ולא יהיה קיים שלב n שבו $(S_n = 1001)$. מצאו בקירוב את $P(A)$.

ה. נניח שמבצעים סדרת הטלות בלתי תלויות, כך שהחל מההטלה השנייה מבצעים הטלות של קוביה מהסוג שמתואר בראש השאלה, אבל בהטלה הראשונה אפשר להטיל קוביה מסוג אחר.

תארו קוביה מסוג אחר שכל תוצאות הטלותיה האפשריות הם מספרים חד ספרתיים, שתוטל בפעם הראשונה, כך שהסתברות המתקבלת בסעיף ד' תהיה מדויקת ולא רק מקורבת.

שאלה 2 (27 נקודות)

יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ שתי שרשרות מרקוב הומוגניות בלתי תלויות בעלות אותו מרחב מצבים, אותה מטריצת מעבר ואותו מצב התחלתי שנקרא לו 1.

- א.** האם קיימות שרשרות כאלה כך שבהסתברות 1 יהיו אין סוף ערכי n שבהם $(X_n = Y_n = 1)$?
- ב.** האם קיימות שרשרות כאלה כך שבהסתברות 1 יהיו רק מספר סופי של ערכי n שבהם $(X_n = Y_n)$?
- ג.** האם קיימות שרשרות כאלה כך שבהסתברות גדולה מ 0.5 יהיו בדיוק 3 ערכי n שבהם $(X_n = Y_n = 1)$?

שאלה 3 (36 נקודות)

בתחנת שרות יש שרת אחד שיכול בכל זמן לתת שרות ללקוח אחד לכל היותר. משך שרות מתפלג $\exp(2)$ (בעל תוחלת זמן 0.5). מופע הלקוחות לתור הוא פואסוני בעוצמה 1. בתחנה אין מקומות המתנה ולקוח המגיע כאשר השרת עסוק, לא משורת ועוזב מיידית. יהי $X(t)$ מספר הלקוחות שבתחנה בזמן t .

- א.** מצאו את היוצר האינפניטיסימלי של התהליך $X(t)$.
- ב.** מהי לאורך זמן רב פרופורצית (אחוז) הלקוחות שעוזבים מיידית ?
- ג.** מסתבר שניתן ליצור שיתוף פעולה בין שתי תחנות שרות מהסוג שתואר. בתחנה המשותפת יהיו שני שרתים שלכל אחד מהם יהיה אותו קצב שרות שתואר, ועוצמת מופע הלקוחות תהיה שווה לסכום העוצמות (זאת אומרת ל $1+1=2$). כל לקוח יטופל רק על-ידי אחד השרתים שיהיו פנויים בזמן שהוא יגיע (אם יהיה לפחות שרת אחד פנוי באותו זמן) ורק לקוחות שיגיעו בזמן ששני השרתים יהיו עסוקים יעזבו מייד. מה תהיה לאורך זמן פרופורצית הלקוחות שיעזבו מיידית ?
- ד.** מסתבר שניתן ליצור שיתוף פעולה בין m תחנות שרות מהסוג שתואר בראש השאלה. בתחנה המשותפת יהיו m שרתים שלכל אחד מהם יהיה אותו קצב שרות שתואר, ועוצמת מופע הלקוחות תהיה שווה לסכום העוצמות (זאת אומרת ל m). כל לקוח יטופל רק על-ידי אחד השרתים שיהיו פנויים בזמן שהוא יגיע (אם יהיה לפחות שרת אחד פנוי באותו זמן) ורק לקוחות שיגיעו בזמן שכל m השרתים יהיו עסוקים יעזבו מייד.
- למה תשאף פרופורצית מספר הלקוחות שעוזבים מיידית כאשר $m \rightarrow \infty$?