# פתרון לבחינה מ 22/07/13

## שאלה 1

**א.**

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

**ב.** בכל שלב $n \geq 1$ נמצאים במצב 1 בסיכוי $\frac{1}{3}$ באופן ב"ת בשלבים הקודמים ( מכל מצב עוברים למצב 1 בסיכוי $\frac{1}{3}$ ).

**ג.** <u>דרך ראשונה</u>

זמן החזרה הוא בעל התפלגות $G\left(\frac{1}{3}\right)$ שלה יש תוחלת 3 ( ההתפלגות היא גיאומטרית, כי בכל שלב, אם עדיין עד אז לא חזרנו, אז סיכוי החזרה שווה לקבוע $\frac{1}{3}$ בלי קשר לעבר ).

<u>דרך שניה</u>

ההסתברות הסטציונרית של מצב 0 היא $\frac{1}{3}$ ומתקיים $E_0 = \frac{1}{\pi_0} = 3$ .

מכיון שמטריצת המעבר היא דו -סטוכסטית, אז הוקטור האחיד הוא וקטור סטציונרי. זו שרשרת בלתי פריקה ולכן הוקטור הסטציונרי הוא יחיד.

<u>דרך שלישית</u>

$$\begin{cases} e_{0,0} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}e_{1,0} + \frac{1}{3}e_{2,0} \\ e_{1,0} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}e_{1,0} + \frac{1}{3}e_{2,0} \\ e_{2,0} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}e_{1,0} + \frac{1}{3}e_{2,0} \end{cases}$$

**ד.** נסתכל על שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש $X_n$ הוא הטבעי הראשון שבו מבקרים מבין הטבעיים $n, n+1, n+2$ . לשרשרת זו יש מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

( למשל אם בשלשה שמתחילה ב 100 , הראשון שבו מבקרים הוא המספר השני שהוא 101, אז הוא גם הראשון שבו מבקרים החל מ 101, אלא ששם הוא הטבעי הראשון, ולמשל אם הראשון שבו מבקרים החל מ 100 הוא 100, אז הראשון שבו מבקרים החל מ 101 הוא בסיכוי שווה 101,102,103 ).

שרשרת זו היא בלתי פריקה. שרשרת זו היא בלתי מחזורית ( כי למשל ניתן לבקר במצב הראשון

בשני צעדים רצופים ולכן המחזור שלו הוא 1, ואי מחזוריות היא תכונה מחלקתית ). בגלל האי מחזוריות קיימות הסתברויות גבוליות ששוות לרכיבי הוקטור הסטציונרי.
מכיון ש 1000 הוא רחוק מההתחלה, אז ההסתברות שהחל מ 1000, הראשון שבו נבקר הוא 1002 שווה בקירוב להסתברות הסטציונרית של המצב השלישי. מתקיים:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

מתקבל פתרון $\pi_3 = \frac{1}{6}$ ( הרכיבים האחרים הם $\pi_1 = \frac{1}{2}$ ו $\pi_2 = \frac{1}{3}$ ).

**ה.** בפעם הראשונה נטיל קוביה שנותנת 1 בסיכוי $\frac{1}{2}$ , נותנת 2 בסיכוי $\frac{1}{3}$ ונותנת 3 בסיכוי $\frac{1}{6}$ .
כך ל $X_1$ כבר תהיה התפלגות שזהה להתפלגות הסטציונרית $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$. מכיון שוקטור ההסתברויות הסטציונריות הוא נקודת שבת, אז לכל $X_n$ תהיה התפלגות זו.

<u>הערות</u>

יש גם קוביות אחרות שיכולות להתאים. למשל, אפשר היה להטיל בפעם הראשונה קוביה שנותנת 2 בסיכוי $\frac{1}{2}$ , נותנת 3 בסיכוי $\frac{1}{3}$ ונותנת 4 בסיכוי $\frac{1}{6}$. כך ל $X_2$ שמציין את מיקום הביקור הראשון בספירה החל מ 2, יש התפלגות שזהה להתפלגות הסטציונרית וכך גם עבור כל $n \ge 2$ תהיה ל $X_n$ התפלגות שזהה להתפלגות הסטציונרית.
הסיבה שהיה כתוב שהתוצאות האפשריות הן רק מספרים חד סיפרתיים, היא כדי למנוע פתרון טריוויאלי ביותר. אילו הקוביה היתה למשל מקבלת 1000 בסיכוי $\frac{5}{6}$, ו 1002 בסיכוי $\frac{1}{6}$, אז בהסתברות $\frac{1}{6}$ היה מתקיים ש 1002 הוא הראשון החל מ 1000.

---

## <u>שאלה 2</u>

**א.** כן
נתן דוגמא של שרשרת בת מצב בודד. תמיד נהיה בו.
<u>הערה</u>
לפי מה שנלמד בכיתה, גם כל שרשרת סופית ובלתי פריקה תתאים כאן. מכיון שמתחילים באותו מצב, אז גם מחזוריות לא תפריע כאן.

**ב.** כן
נתן דוגמא של שרשרת שמצביה הם צמתי עץ אין סופי שבו לכל צומת יש שני בנים. מתחילים בשורש העץ ובכל שלב עוברים לאחד מהבנים של הצומת שבו נמצאים. ברגע ששני התהליכים נפרדים, אז יותר הם לא יפגשו. ההסתברות שהם לא יפרדו עד שלב $n$ היא $0.5^n$ וההסתברות שהם לא יפרדו אף פעם קטנה מכל $0.5^n$ עבור כל $n$ טבעי ולכן שווה לאפס.
<u>הערות</u>
שום שרשרת סופית לא תהיה דוגמא מתאימה. בשרשרת סופית, לגבי כל שלב, יש הסתברות חיובית ששני התהליכים יהיו באותו מצב. בשרשרת סופית, יש הסתברות חיובית ששני התהליכים יקלטו באותה מחלקה ואז שכיחות הפעמים שבהן שני התהליכים יהיו באותו מצב היא חיובית. בגלל שמתחילים באותו מצב, אז גם מחזוריות, לא יכולה למנוע משני התהליכים מלהפגש אין סוף פעמים.

לא כל שרשרת אין סופית שכל מצביה הם חולפים, היא דוגמא טובה. למשל, אם יש הילוך מקרי שאינו סימטרי, אז אמנם שני התהליכים לא יפגשו במצב ההתחלתי אין סוף פעמים, אבל הם כן יפגשו אין סוף פעמים במצבים שונים. צריך לשלול את האפשרות שהם יפגשו אין סוף פעמים במצבים שונים.

**ג.** לא

הודות להומוגניות בזמן, בכל פעם שמתקיים $\left(X_n = Y_n = 1\right)$ יש אותה הסתברות שיתקבל ערך נוסף $m$ גדול יותר כך ש $\left(X_m = Y_m = 1\right)$. אם הסתברות זו שווה ל 1, אז בהסתברות 1 יתקיים $\left(X_n = Y_n = 1\right)$ עבור אין סוף ערכי $n$. אם הסתברות זו שווה ל $p$ המקיים $p < 1$, אז מספר הפעמים שיתקיים $\left(X_n = Y_n = 1\right)$ מתפלג גיאומטרית. משתנה גיאומטרי מקבל את הערך 2 בהסתברות גדולה יותר מאשר את הערך 3 ולכן ההסתברות שיקבל את הערך 3 קטנה מ 0.5 .

<u>הערה</u>

בשרשרות בעלות קבוצת המצבים $\{1,2\}$, בעלות המצב ההתחלתי 1 ובעלות מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המאורע שיתקיים $\left(X_n = Y_n = 1\right)$ בדיוק 3 פעמים הוא המאורע ששני התהליכים ישארו במצב 1 בשלושת השלבים הראשונים ואז לפחות אחד מהם יעזוב את מצב 1 ( ברגע שלפחות אחד מהם יעזוב את מצב 1, אז לא יתקיים $\left(X_n = Y_n = 1\right)$ ). למאורע זה יש הסתברות חיובית. דוגמא זו ממחישה שיתכן שיתקיים $\left(X_n = Y_n = 1\right)$ בדיוק 3 פעמים. אך הראנו שלא יכולה להיות לו בשום מקרה הסתברות גדולה מחצי.

---

## <u>שאלה 3</u>

**א.** שרשרת על המצבים $\{0,1\}$ ויוצר $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

**ב.** צרכנים נדחים אם נמצאים במצב 1. נחשב את ההסתברות הסטציונרית של מצב 1:

$$\begin{cases} -\pi_0 + 2\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

לכן $\pi_1 = \frac{1}{3}$ וזו פרופורצית הנדחים.

**ג.** קבוצת מצבי השרשרת היא $\{0,1,2\}$ ויש יוצר

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$\begin{cases} -2\pi_0 + 2\pi_1 = 0 \\ 2\pi_0 - 4\pi_1 + 4\pi_2 = 0 \\ 2\pi_1 - 4\pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

הפתרון הוא $\pi_2 = \frac{1}{5}$ , $\pi_1 = \frac{2}{5}$ , $\pi_0 = \frac{2}{5}$ ולכן התשובה היא $\frac{1}{5}$ .

<u>הערות</u>

כל אחד מהשרתים גם מנוצל יותר טוב, הוא עסוק באחוז גבוה יותר של הזמן שבו הוא היה עסוק

בסעיפים הקודמים. במצב 2 שני השרתים עסוקים ובמצב 1 בדיוק אחד מהם עסוק. לכן שכיחות זמן התעסוקה של כל שרת היא $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$. לכן גם ההסתברות ששני השרתים עסוקים אינה שווה למכפלת ההסתברויות שהראשון עסוק בהסתברות שהשני עסוק ( $\frac{1}{5}\neq\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$ ).

**ד.** כאשר יש $m$ שרתים, קבוצת המצבים היא $\{0,1,2,\cdots,m\}$ וצרכנים נדחים רק במצב $m$. יש מעברים רק בין מצבים שכנים. שכיחות הפעמים שעוברים ממצב $k$ למצב $k+1$ שווה לשכיחות הפעמים שעוברים ממצב $k+1$ למצב $k$. לכן עבור כל $k$ מתקיים $\pi_k m=\pi_{k+1}\cdot 2(k+1)$ ( במצב $k+1$ עוצמת זרם העוזבים היא $2(k+1)$ ובכל מצב עוצמת זרם המגיעים היא $m$ ).

לכן עבור כל $k>\frac{m}{2}$ נקבל $\pi_k>\pi_{k+1}$. לכן מבין המצבים הגדולים מ $\frac{m}{2}$, השכיחות של מצב $m$ היא הכי קטנה. לכן שכיחותו קטנה מ $\frac{1}{m/2}$. לכן, כאשר $m\to\infty$ שכיחותו שואפת לאפס.

<u>הערות</u>

עוצמת זרם המגיעים נמוכה מהיכולת לשרת, ולכן נדיר שכל השרתים הרבים יהיו עסוקים.

למעשה, כאשר $m\to\infty$ אז לאורך זמן שכיחות זמן התעסוקה של כל שרת תשאף ל $\frac{1}{2}$ ( צריך לעבוד בחצי מהיכולת המכסימלית כדי להתגבר על זרם המגיעים ). אך שוב כמו בסעיף הקודם, אין סיבה להניח שיש אי תלות בין השרתים השונים. לכן ההסתברות שכולם תפוסים לא שווה למכפלת ההסתברויות שהשרתים השונים תפוסים.

---

שלומי