

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

שאלה 1 (45 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.05 & 0.15 & 0.25 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- א.** מיינו את מצבי השרשרת למצבים חולפים ולמחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים.
ב. מצאו מערכת משוואות לחישוב תוחלות מספרי הצעדים עד להיקלטות במחלקה של מצבים נשנים, עבור כל מצב התחלתי.
אין צורך לפתור את המערכת.
ג. מהו $P(X_2 = 1 | X_0 = 1)$?
כאן יש לתת גם תשובה סופית.
ד. מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 3 | X_0 = 1)$?
כאן יש לתת גם תשובה סופית.
ה. מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n+1} = X_n | X_0 = i)$ עבור כל $1 \leq i \leq 4$?
כאן יש לתת גם תשובה סופית.

שאלה 2 (27 נקודות)

שאלה זו עוסקת בשרשרת מרקוב של הילוך מקרי $\{(X_n, Y_n, Z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ על שריג תלת מימדי. נניח שבכל שלב הולכים בדיוק בכיוון אחד: צפונה בהסתברות p_1 , דרומה בהסתברות p_2 , מזרחה בהסתברות p_3 , מערבה בהסתברות p_4 , למעלה בהסתברות p_5 ולמטה בהסתברות p_6 , כך ש $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

- א.** מצאו את כל וקטורי ההסתברויות $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ שעבורם מצבי השרשרת הם נשנים.
- ב.** האם קיימים וקטורי הסתברויות $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ שעבורם מצבי השרשרת הם נשנים חיובית?
- ג.** מצאו עבור כל וקטור הסתברויות $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ את $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n| + |Y_n| + |Z_n|)$.
-

שאלה 3 (36 נקודות)

בזמן 0 אין בתחנה שרתים ואין בה לקוחות. לתחנה מגיעים שרתים בזרם פואסוני בעל עצמה 1 ולקוחות בזרם פואסוני בעל עצמה 8. אין תלות בין מספר השרתים המגיעים לבין מספר הלקוחות המגיעים. כל שרת שמגיע לתחנה, אף פעם לא עוזב אותה. כל שרת יכול לתת בזמן מסוים שרות לכל היותר ללקוח אחד. כל זמן שרות מתפלג $\exp(1)$. כאשר לקוח מגיע, אז אם יש שרת פנוי, אז הוא מתקבל מיידית לשרות אצל אחד השרתים הפנויים, ואם אין בתחנה שרת פנוי, אז הוא מצטרף לתור הממתינים לקבלה אצל שרת שיתפנה. יהי $X(t)$ - מספר הלקוחות שבתחנה בזמן t . יהי $Y(t)$ - מספר השרתים שבתחנה בזמן t .

- א.** האם אוסף המשתנים $Y(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף?
- ב.** האם אוסף המשתנים $X(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף?
- ג.** האם אוסף המשתנים הדו-מימדיים $(X(t), Y(t))$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף?
- ד.** האם מספר הלקוחות שבמערכת ישאף לאין סוף כאשר $t \rightarrow \infty$?
-