פתרון לבחינה מ 04/10/13

שאלה 1

א. מצבים $\{3,4\}$ הם מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים. הם מקושרים ביניהם ואין מהם מסלולים למצבים אחרים. מחלקה סופית של מצבים ארגודים היא מחלקה של מצבים נשנים.
ממצבים 1 ו 2 יש מסלולים למצבים $\{3,4\}$ שמהם אין חזרה ל 1 ול 2. לכן 1 ו 2 אינם ארגודים.
מצבים שאינם ארגודים הם חולפים.

ב. e_1 - תוחלת זמן ההגעה ממצב 1 למחלקה של מצבים נשנים.
e_2 - תוחלת זמן ההגעה ממצב 2 למחלקה של מצבים נשנים.

$$\begin{cases} e_1 = 1 + 0.1e_1 + 0.2e_2 + 0.3\cdot 0 + 0.4\cdot 0 \\ e_2 = 1 + 0.05e_1 + 0.15e_2 + 0.25\cdot 0 + 0.55\cdot 0 \end{cases}$$

או בצורה אחרת

$$\begin{cases} e_1 = 0.1(1+e_1) + 0.2(1+e_2) + 0.3(1+0) + 0.4(1+0) \\ e_2 = 0.05(1+e_1) + 0.15(1+e_2) + 0.25(1+0) + 0.55(1+0) \end{cases}$$

זמן ההגעה ממצב נשנה למחלקה של מצבים נשנים הוא בהכרח 0. זה בא לידי ביטוי במערכות המשוואות: אם מגיעים למצב נשנה, אז תוחלת מספר הצעדים הצפויים בהמשך היא 0.

ג. $0.1\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.05$
אסור לעבור בשלב 1 למצבים $\{3,4\}$. צריך או להישאר במצב 1 פעמיים או לעבור בשלב 1 למצב 2 ואז בשלב 2 לחזור למצב 1.

ד. התשובה היא 0.7 .
מדובר בשרשרת סופית בעלת מחלקה יחידה של מצבים נשנים שהיא $\{3,4\}$. לכן בהסתברות 1 נגיע למחלקה זו. החל מהשלב שלאחר ההגעה ל $\{3,4\}$, נהיה בכל שלב במצב 3 בהסתברות 0.7 (גם ממצב 3 וגם ממצב 4, ההסתברות לעבור למצב 3 היא 0.7).
<u>הערה</u>
בשרשרת יש וקטור סטציונרי יחיד $(0,0,0,0.7,0.3)$ והמצבים הנשנים הם לא מחזוריים. לכן, הוקטור הזה מייצג את ההסתברויות הגבוליות עבור כל מצב התחלתי.

ה. התשובה היא $0.7\cdot 0.7 + 0.3\cdot 0.3$.
בודאות נגיע למחלקה $\{3,4\}$. שכיחות הביקורים במצב 3 תהיה 0.7 ושכיחות הביקורים במצב 4 תהיה 0.3 . אם נמצאים במצב 3, אז הסיכוי להישאר בו בשלב הבא הוא 0.7 ואם נמצאים במצב 4, אז הסיכוי להישאר בו בשלב הבא הוא 0.3 .

שאלה 2

א. התנאי לנשנות הוא שלכל היותר ארבעה מבין $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ הם חיובים ומתקיים $p_1 = p_2\ ,\ p_3 = p_4\ ,\ p_5 = p_6$.
בכל אחד מהמימדים, אסור שיהיה סחף. אם למשל $p_1 \neq p_2$, אז שכיחות הצעדים בכיוון אחד לא תהיה שווה לשכיחות הצעדים בכיוון האחר באותו מימד, ואז לפי החוק החזק מספר הפעמים שנהיה בראשית יהיה סופי.
אם כל השישה הם חיובים, אז שכיחות הצעדים בכל אחד מהמימדים היא חיובית. כך עבור כל מימד

קיים קבוע c, כך שהחל משלב מסוים, תמיד נעשה לפחות cn צעדים באותו מימד. כך החל משלב מסוים N, עבור כל $n > N$ ההסתברות שבמימד זה נהיה בראשית, לא תהיה גדולה מ $\frac{c'}{\sqrt{n}}$ עבור קבוע c' כלשהו (לפי ניתוח שעשינו בקורס לגבי הילוך מקרי על הישר). אם זה יקרה בשלושת המימדם, אז ההסתברות לבקר בראשית סימולטנית בשלושת המימדים לא תהיה גדולה מסדר גודל של $\frac{1}{n^{1.5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$. מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}} < \infty$, אז לפי הקריטריון לנשנות, המצב ההתחלתי הוא חולף. מכיון שאת השיקול הזה ניתן להפעיל לגבי כל מצב התחלתי, אז כל המצבים הם חולפים (נימוק אלטרנטיבי הוא לפי זה שנשנות היא תכונה מחלקתית).

אם ניתן לעשות מהלכים רק בשני מימדים ובכל מימד ההסתברות למהלכים בכיוונים המנוגדים היא שווה, אז ההסתברות להיות בראשית לאחר מספר זוגי n של צעדים, מתנהגת כמו $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$.

מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, אז המצב ההתחלתי הוא נשנה. שוב, את השיקול הזה ניתן להפעיל לגבי כל מצב התחלתי, ולכן כל המצבים נשנים (כעת לא כל מצבי השריג התלת מימדי הם באותה מחלקה).

<u>הערות</u>

תנאי הכרחי לכך שכל המצבים הם מחלקה בלתי פריקה הוא שניתן ללכת בכל אחד מהמימדים. ראינו כאן שבמקרה זה כל המצבים הם חולפים. אבל במהלך הקורס דברנו גם על הילוכים מקריים על שריג, שבהם המצבים השונים אינם מהווים מחלקה בלתי פריקה אחת. ראו דוגמא שעשינו בכיתה ושמופיעה בשאלה 2 מהבחינה מ 15/08/08.

<u>ב</u>. לא יתכן שיש מצבים נשנים חיובית.

כל מצב מקושר לאין סוף מצבים. אם היה מצב נשנה חיובי, אז היתה לו הסתברות סטציונרית $a > 0$. מכיון שלגבי כל מצב, יש לו אותה התפלגות זמן חזרה ואותה תוחלת זמן חזרה, אז לכל מצב במחלקה היתה הסתברות סטציונרית a. מכיון ש $\sum_{i=1}^{\infty} a = \infty$ בעוד שסכום הרכיבים של וקטור סטציונרי, צריכים להסתכם ב 1, אז קבלנו סתירה לקיום מצב נשנה חיובי.

<u>הערה</u>

בקורס ראינו שאפילו הילוך מקרי חד מימדי, אינו נשנה חיובי. ראינו בדרכים שונות שההסתברות להיות במצב ההתחלתי שואפת לאפס ושתוחלת זמן החזרה למצב ההתחלתי היא אין סוף.

<u>ג</u>. אין סוף עבור כל וקטור $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$

יש רק מספר סופי של מצבים שבהם סכום הערכים המוחלטים של הקורדינטות אינו גדול מ M. מכיון שאין בשרשרת מצבים נשנים חיובית, אז לכל אחד ממספר סופי זה של מצבים יש הסתברות גבולית של אפס (כמו לכל מצבי השרשרת שהם חולפים או נשנים אפס). לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} P(|X_n| + |Y_n| + |Z_n| \geq M + 1) = 1$. בנוסף מתקיים $P(|X_n| + |Y_n| + |Z_n| \geq 0) = 1$. לכן, עבור כל M קיים N, כך שעבור כל $n > N$ מתקיים $E(|X_n| + |Y_n| + |Z_n|) > M$. לכן התוחלת שואפת לאין סוף.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. כן

אוסף המשתנים $Y(t)$ הוא תהליך פואסון עם קצב 1. מכל מצב עוברים לאחר זמן המתפלג $\exp(1)$ לטבעי הבא.

<u>ב</u>. לא

קצב השרות תלוי בזמן. ככל שמתקדמים בזמן, סביר שיהיו יותר שרתים וקצב השרות הממוצע יהיה

גבוה יותר. למשל, אם בזמן מסוים יש במערכת חמישה לקוחות, אז יתכן שלא כל החמישה יהיו משורתים (כי אין עדיין במערכת חמישה שרתים). אבל כאשר הזמן שואף לאין סוף ההסתברות שבמערכת, עדיין לא יהיו חמישה שרתים שואפת לאפס.

<u>הערה</u>

אפשר להראות שאין מרקוביות בגלל שקצב השירות הממוצע תלוי בזמן. אבל אי אפשר להוכיח בהסתמך על תלות בסדרת משתנים אחרת. נמחיש זאת על-ידי דוגמא: אם כל פרט מוליד צאצאים בקצב 1, אז קצב הלידות תלוי במספר הפרטים הנוכחי. הוא גם תלוי בתהליך שמקבל את הערך של מספר הפרטים הנוכחי ועוד 1 (שלמעשה מגלה לנו מהו מספר הפרטים הנוכחי). אבל התהליך הוא מרקובי, כי כל האינפורמציה לגבי ההמשך נמצאת בערך של מספר הפרטים הנוכחי.

<u>ג</u>. כן

נתאר קצבי עזיבה של המצבים השונים:

ממצב (k,l) עוברים בעצמה 8 למצב $(k+1,l)$ ובעצמה 1 למצב $(k,l+1)$. אם מתקיים $l>0$, $k>0$, אז עוברים בקצב $\min\{k,l\}$ למצב $(k-1,l)$.

צירוף שני הפרמטרים נותן לנו את כל המידע על קצבי העזיבה של המצבים.

<u>ד</u>. לא ישאף לאין סוף.

החל מרגע מסוים יהיו לפחות 9 שרתים במערכת. נניח בשלילה שמספר הלקוחות שבמערכת ישאף לאין סוף. לפי הנחה זו, החל משלב מסוים יהיו גם בכל זמן לפחות 9 לקוחות במערכת. החל מהשלב שבו יהיו תמיד 9 שרתים ו 9 לקוחות, קצב סיומי השרות יהיה תמיד בעצמה של לפחות 9. לכן החל משלב מסוים, יהיה מספר מסיימי השרות גדול ממספר הלקוחות שמגיעים למערכת (מגיעים רק בעצמה 8). לכן מספר הלקוחות שבמערת לא ישאף לאין סוף וקבלנו סתירה.

שלומי