פתרון לבחינה מ 14/07/14

שאלה 1

א. התוחלת היא אין סוף.
מצב 7 הוא נשנה אפס כמו כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה. זאת אומרת, שתוחלת זמן החזרה אליו מעצמו היא אין סוף. אם מתחילים ממצב 7, אז לאחר שמבזבזים צעד, נמצאים במצבים 6 או 8.
משיקולי סימטריה, תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב 7 מכל אחד מהמצבים 6 או 8 היא שווה.
מכיון שהתוחלת השלמה היא אין סוף, אז תוחלת מספר הצעדים להגעה למצב 7 מכל אחד מהם היא גם אין סוף.
ניתן גם להראות שהתוחלת היא אין סוף באמצעות פתרון משוואה.
יהיה $e_{6,7}$ - תוחלת זמן ההגעה ממצב 6 למצב 7.
יהיה $e_{5,7}$ - תוחלת זמן ההגעה ממצב 5 למצב 7.
מתקיים $e_{6,7}=1+0.5\cdot 0+0.5e_{5,7}$.
מתקיים $e_{5,7}=e_{5,6}+e_{6,7}$ (כי כדי להגיע למצב 7 ממצב 5, צריך קודם באיזשהו שלב לעבור במצב 6).
משיקולי סימטריה נקבל $e_{5,6}=e_{6,7}$.
לכן נקבל $e_{6,7}=1+0.5\cdot 2e_{6,7}$ ולמשוואה זו אין פתרון סופי.
<u>הערה:</u>
התוחלת של זמן ההגעה למצב 7 היא אין סוף. אבל בהסתברות 1 מגיעים למצב 7 ולכן קיים משתנה מקרי שמודד את זמן ההגעה למצב 7. זהו משתנה מקרי שבהכרח מקבל ערך סופי ושהוא בעל תוחלת של אין סוף.
<u>הערה</u>
באופן כללי, זמן ההגעה ממצב נשנה אפס לעצמו הוא בעל תוחלת אין סוף. אבל זמן ההגעה ממצב אחר למצב נשנה אפס אינו בהכרח בעל תוחלת אין סוף. גם זמן ההגעה ממצב אחר שבמחלקתו אינו בהכרח בעל תוחלת אין סוף. נמחיש זאת על-ידי דוגמא:
נניח שיש שרשרת על כל השלמים האי שליליים. ממצב 0 בהכרח עוברים למצב 1 ומכל טבעי עוברים בסיכוי שווה לכל אחד משכניו. מצב 1 הוא נשנה אפס, אך ממצב 0 מגיעים למצב 1 בהכרח בצעד אחד.

ב. e_6 - תוחלת זמן ההגעה ממצב 6 למצב 4 או למצב 7.
e_5 - תוחלת זמן ההגעה ממצב 5 למצב 4 או למצב 7.
מתקיים:

$$\begin{cases} e_6=1+0.5\cdot 0+0.5e_5 \\ e_5=1+0.5\cdot 0+0.5e_6 \end{cases}$$

או בגישה שונה:
כאשר נמצאים במצבים 5 או 6, אז בכל שלב, עוברים למצבים 4 או 7 בסיכוי חצי ובסיכוי חצי ממשיכים במצבים 5 או 6. לכן התפלגות מספר הצעדים עד הגעה למצבים 4 או 7 היא $G(0.5)$ שלה יש תוחלת של 2.
<u>הערה</u>
המשתנה המודד את זמן ההגעה למצב 7 הוא בעל תוחלת אין סוף. גם המשתנה המודד את זמן

ההגעה למצב 4 הוא בעל תוחלת אין סוף. אך ראינו כאן שלמשתנה המוגדר כמינימום שביניהם יש תוחלת סופית.

<u>ג</u>. a_6 - ההסתברות להגיע ממצב 6 למצב 7 לפני שמגיעים למצב 4.

a_5 - ההסתברות להגיע ממצב 5 למצב 7 לפני שמגיעים למצב 4.

מתקיים:

$$\begin{cases} a_6 = 0.5\cdot 1 + 0.5a_5 \\ a_5 = 0.5\cdot 0 + 0.5a_6 \end{cases}$$

נתן גם גישה נוספת:
בכל שלב שבו נמצאים במצבים 5 או 6, יש סיכוי של חצי לעבור למצבים 4 או 7 מייד.
כדי שנגיע למצב 7 לפני שנגיע למצב 4, צריך שהמעבר יהיה בזמן אי זוגי. ההסתברות לכך היא

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.5\cdot 0.5^{2k} = 0.5\sum_{k=0}^{\infty} 0.25^{k} = 0.5\cdot\frac{1}{1-0.25} = \frac{2}{3}$$

<u>ד</u>. יש הכחדות בהסתברות 1.
תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט היא $0.7\cdot 0 + 0.2\cdot 2 + 0.1\cdot 3 < 1$.
למדנו שבתהליך הסתעפות שבו תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט, קטנה מ 1, יש הכחדות ודאית.

<u>ה</u>. יש הכחדות בהסתברות 1.
זמן ההגעה של התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ למצב 7 הוא משתנה מקרי שמקבל רק ערכים סופיים (למרות שיש לו תוחלת של אין סוף).
שושלת שמתחילה בפרט בודד נכחדת בודאות. לכן גם כל מספר סופי של שושלות יכחדו בודאות.
ההסתברות להכחדות היא שקלול של הסתברויות של 1 עבור המקרים השונים של ערכים סופיים של זמן ההגעה של התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ למצב 7.

<u>הערה</u>
אמנם תוחלת מספר הפרטים בכל דור היא אין סוף. אבל בהסתברות ששואפת ל 1 כאשר n שואף לאין סוף, יש 0 פרטים בדור ה- n. בהסתברות 1 קיים דור שהחל ממנו תמיד יש 0 פרטים.

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. נפריך את הטענה באמצעות מתן דוגמא נגדית.
הדוגמא היא של שרשרת בעלת המצבים $\{0,1,2\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בכל שלושה צעדים רצופים מבלים פעם אחת בכל אחד משלושת המצבים.
דוגמא מתאימה אחרת היא של שרשרת על כל השלמים שבה בכל שלב בהכרח הולכים צעד אחד ימינה. כך בכל שלב מספר הביקורים המצטבר בכל מצב הוא בהכרח 0 או 1.

<u>הערה</u>
אסור לתת דוגמא של שרשרת בלתי פריקה ולא מחזורית. אם בשרשרת כזאת, ניתן לחזור ממצב לעצמו בצעד אחד, אז יש הסתברות חיובית לכך שנעשה במצב זה רצף של יותר משני ביקורים. אם השרשרת לא מחזורית ולא ניתן לחזור ממצב לעצמו אז לפחות לא כל המסלולים הם באורך שהוא כפולה של מספר מצבי השרשרת (או בעלי אורך אין סוף, אם השרשרת אין סופית), לכן לא לכל המצבים יש אותו מספר של יצוגים בכל מסלול. כך ניתן בהסתברות חיובית לחזור מספר פעמים על מסלול כזה וייוצר הפרש בין מספר הביקורים במצבים שונים.

<u>ב</u>. נפריך את הטענה באמצעות מתן דוגמא נגדית.
הדוגמא היא של שרשרת בעלת המצבים $\{0,1,2\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

במצב 0 לא מבקרים לעולם לאחר שמתחילים בו. בהמשך, בכל שני צעדים רצופים, מבלים בכל אחד מהמצבים 1 ו 2 פעם אחת.

<u>הערה</u>

כמו בסעיף א', אסור גם כאן שהמצבים הנשנים יהיו לא מחזוריים.

ג. נפריך את הטענה באמצעות מתן דוגמא נגדית.

הדוגמא היא של שרשרת בלתי פריקה ונשנית אפס על כל השלמים האי שליליים.

נניח שמתקיים עבור כל $i \ge 1$ מתקיים $P_{i,i-1} = 1$.

עבור מצב 0 מתקיים עבור כל $i \ge 0$: $P_{0,i} = \dfrac{c}{(i+1)^2}$, כאשר $c = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2}}$.

אם ממצב 0 מגיעים ישירות למצב i, אז יש צעד הלוך ו i צעדים חזור, ובסך הכל $i+1$ צעדים להגעה ממצב 0 לעצמו.

לכן תוחלת מספר הצעדים לחזרה ממצב 0 למצב 0 היא

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{(i+1)^2}(i+1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{i+1} = \infty$$

לכן מצב 0 הוא נשנה אפס ומתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{0,0}^{(n)} = 0$.

נשים לב שלאחר כל ביקור במצב $j \ne 0$, חייבים לבקר במצב 0 לפני ביקור נוסף במצב j.

נשים לב שכאשר נמצאים במצב 0, יש הסתברות של c שנעבור ממנו שוב למצב 0. סדרת האינדיקטורים של הגעה ישירה ממצב 0 למצב 0 לאחר הביקורים השונים בו, היא סדרת אינדיקטורים בלתי תלויים בעל אותה הסתברות. לכן לפי הלמה של בורל קנטלי, בהסתברות 1 אין סוף פעמים נעבור ממצב 0 למצב 0. החל מהפעם השלישית שזה יקרה, תמיד מספר הביקורים במצב 0 יהיה גדול ביותר מ 2 ממספר הביקורים בכל מצב אחר.

<u>הערה</u>

אי אפשר לתת דוגמא מתאימה של שרשרת עם מספר סופי של מצבים. בשרשרת סופית, יש בהכרח לפחות מצב אחד שבו מבקרים אין סוף פעמים. אם בשרשרת סופית מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{0,0}^{(n)} = 0$, אז מצב 0 הוא חולף ונבקר בו רק מספר סופי של פעמים (בשרשרת סופית אין מצבים נשנים אפס).

<u>שאלה 3</u>

א. מצב 0 - התחנה ריקה

מצב 1- יש לקוח אחד בשירות

מצב 2- יש לקוח אחד בשרות ואחד בהמתנה

אם יש לקוח בשרות אז קצה העזיבה של התחנה הוא 1.

אם מקום ההמתנה לא תפוס אז קצב הכניסה לתחנה הוא 1.

היוצר האינפיניטיסימלי הוא

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מטריצת המעבר בזמני הקפיצות היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{1+1} & 0 & \frac{1}{1+1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. בכל שני צעדים רצופים, נמצאים בדיוק פעם אחת במצב 1. לכן השכיחות הגבולית של מצב 1 היא חצי.

<u>דרך אחרת</u>

השכיחות הגבולית של כל מצב שווה להסתברות הסטציונרית שלו. נחשב את וקטור ההסתברויות הסטציונריות:

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.5\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 + \pi_2 \\ \pi_2 = 0.5\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

כאן די להסתכל במשוואה השניה של המערכת כדי לראות שההסברות הסטציונרית של מצב 1 היא חצי.

בצעדים הזוגיים לאחר התחלה במצב 0 לא יכולים להימצא במצב 1 ואילו בצעדים האי זוגיים מוכרחים להימצא בו. לכן אין הסתברות גבולית (בשרשרת שמצביה נשנים חיובית ומחזוריים, אין הסתברויות גבוליות).

ג. במצב 2 שוהים זמן בעל תוחלת 0.5 עד שמגיע לקוח או שלפני זה מסתיים שרות ועוברים למצב 1 (הזמן הזה הוא בעל התפלגות שהיא המינימום של שני משתנים בלתי תלויים בעלי התפלגות $\exp(1)$). אם קודם מגיע לקוח, אז במודל שלנו כאן, נשארים במצב 2, אבל זו התרחשות של דחייה.

במצב 1 שוהים זמן בעל תוחלת 0.5 ואז עוברים בסיכוי שווה למצבים 0 או 2.

במצב 0 שוהים זמן בעל תוחלת 1 ואז עוברים למצב 1.

יהיו e_0, e_1, e_2 התוחלות של הזמנים עד דחייה כאשר נמצאים במצבים השונים. מתקיים:

$$\begin{cases} e_0 = 1 + e_1 \\ e_1 = 0.5 + 0.5e_0 + 0.5e_2 \\ e_2 = 0.5 + 0.5e_1 + 0.5 \cdot 0 \end{cases}$$

הפתרון המבוקש הוא ערכו של e_0 (כי מתחילים במצב 0).

מתקבל פתרון $e_0 = 6$.

<u>הערה</u>

ניתן לתת הסבר נוסף לאותה מערכת משוואות. התפלגות הזמן עד הדחיה הראשונה, זהה להתפלגות הזמן עד שיהיו במערכת לראשונה שלושה לקוחות כאשר יש שרת אחד ואין סוף מקומות המתנה. בשני המקרים מודדים את הזמן עד שיבוא לקוח כאשר יש בתחנה שני לקוחות. במודל שאותו הצגנו כהסבר, ממצב 2 בהסתברות חצי עוברים למצב 1 ובהסתברות חצי עוברים למצב 3. זמן השהות במצב 2 מתפלג כאן מעריכית עם תוחלת חצי (יש תחרות בין שני זרמים שלכל אחד מהם יש עצמה 1). למעשה ביוצר האינפיניטיסימלי בכל שורה חוץ מהשורה של מצב 0, יש 1 משני צידי האלכסון הראשי.

ד. נשים לב שרגע הדחייה הראשונה הוא משתנה מקרי.

ברגע הזמן t_1 היינו במצב 2. התרחשה דחייה, אבל נשארנו במצב 2. מקיום הדחייה, אנו למדים שאנו במצב 2. אבל לדחייה אין השפעה על ההמשך. צריך שכעבור שעה אחת נהיה במצב 1. בגלל ההומוגנית בזמן מה שמבוקש הוא $P_{2,1}(1)$. העובדה שהתחלנו בזמן 0 במצב 0, שייכת לעבר הקודם יותר וכבר לא רלוונטית.

נתן משוואה דיפרנציאלית כדי לחשב את $P_{2,1}(t)$ ואחר-כך נציב בפתרון $t = 1$.

$$P_{2,1}^{/}(t) = P_{2,0}(t) \cdot 1 - P_{2,1}(t) \cdot 2 + P_{2,2}(t) \cdot 1$$

או

$$P_{2,1}^{/}(t) = -2P_{2,1}(t) + (1 - P_{2,1}(t))$$

או

$$P_{2,1}^{/}(t) = -3P_{2,1}(t) + 1$$

למשוואה זו יש אוסף פתרונות $P_{2,1}(t) = \frac{1}{3} + ce^{-3t}$.

יש תנאי התחלה $P_{2,1}(0) = 0$ ולכן נקבל פתרון $P_{2,1}(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$.

כעת נציב $t = 1$ ונקבל פתרון $P_{2,1}(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3}$.

<u>הערה</u>

מצבים 0 ו 2 הם סימטריים ביחס למצב 1. לכן כאשר מחשבים הסתברויות להיות במצב 1 אפשר להסתכל על שרשרת בת שני מצבים שבה המצב הראשון מייצג את מצב 1 והמצב השני מייצג את המצבים המקוריים 0 ו 2. לשרשרת זו יש יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>הערה</u>

בשעה אחת מתרחשים מספר שאינו ידוע מראש של קפיצות.

שלומי