

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

שאלה 1 (45 נקודות)

בתחילה יש בכד X כדורים כחולים ואף לא כדור מצבע אחר. בכל יחידת זמן מוציאים מהכד כדור אקראי מבין כל הכדורים שבכד בשלב זה, ומכניסים במקומו כדור ירוק. יהי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ התהליך שמונה את מספר הכדורים הירוקים עם תום יחידות הזמן השונות. יהי $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ התהליך שמציין את פרופורצית הכדורים הירוקים עם תום יחידות הזמן השונות.

- א. נניח ש $X = 3$, מצאו את מטריצת המעבר של התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ומיינו את מצביו.
- ב. נניח ש $X = 3$, מהי תוחלת מספר השלבים עד שהתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב נשנה?
- ג. נניח ש $X = 3$, מצאו את מטריצת המעבר של התהליך $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ומיינו את מצביו.
- ד. משתנה מקרי מנוון הוא משתנה מקרי שיכול לקבל רק ערך יחיד ידוע מראש. כעת נניח ש X הוא משתנה מקרי שמקבל רק ערכים טבעיים. האם עבור כל משתנה מקרי X שאינו מנוון, היא שרשרת מרקוב הומוגנית? האם עבור כל משתנה מקרי X שאינו מנוון, אינה שרשרת מרקוב הומוגנית?
- ה. גם בסעיף זה נניח ש X הוא משתנה מקרי שמקבל רק ערכים טבעיים. עבור אילו משתנים מקריים X , חל על הסדרה $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ החוק החזק של המספרים הגדולים? עבור אילו משתנים מקריים X , חל על הסדרה $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ החוק החזק של המספרים הגדולים?

שאלה 2 (27 נקודות)

יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים של כל פרט מקיימת $P(Z=0)=1-p$, $P(Z=2)=p$ כאשר $0 < p < 1$.

א. האם עבור כל ערך $0 < p < 1$ קיים בתהליך מצב סופג?

ב. מצאו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0)$ כאשר $p = \frac{2}{3}$ ו $(X_0 = 2)$.

ג. מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 2)$ כאשר $p = \frac{2}{3}$ ו $(X_0 = 2)$?

שאלה 3 (36 נקודות)

יהי $\{X_t\}$ תהליך מרקוב בזמן רציף שמצביו הם כל השלמים האי שליליים ושבזמן מכל מצב יש מעברים ישירים רק לשלמים שכנים שלו.

נניח שלתהליך קיים יוצר אינפיניטימלי המקיים

$$\Lambda_{i,i+1} = 1, \quad 0 \leq i < \infty$$

$$\Lambda_{i,i-1} = a \quad \text{עבור כל } 1 \leq i \leq 100$$

$$\Lambda_{i,i-1} = b \quad \text{עבור כל } 101 \leq i < \infty$$

א. האם כל מצבי השרשרת הם נשנים כאשר $a = b = 1$?

ב. האם כל מצבי השרשרת הם נשנים כאשר $a = 1$ ו $b = 0.5$?

ג. האם כל מצבי השרשרת הם נשנים כאשר $a = 0.5$ ו $b = 1$?

ד. נניח ש $a = b = 1$ וש $(X_0 = 1)$ יהי $\{Y_t\}$ התהליך שמונה את מספר הקפיצות של

התהליך $\{X_t\}$ עד נקודות הזמן השונות.

האם התהליך $\{Y_t\}$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף?
