פתרון לבחינה מ 30/09/14

שאלה 1

א. קבוצת המצבים היא $\{0,1,2,3\}$. מטריצת המעבר היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מצב 3 הוא מצב סופג וככזה הוא מהווה מחלקה בלתי פריקה של מצב נשנה יחיד.
מיתר המצבים יש מסלולים למצב 3 ואין דרך חזרה אליהם. לכן הם מצבים לא ארגודים. מצבים לא ארגודים הם חולפים.

ב. e_i - תוחלת מספר הצעדים להגעה ממצב i למצב 3. מבוקש e_0. מתקיים:

$$\begin{cases} e_0 = 1 + e_1 \\ e_1 = 1 + \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 \\ e_2 = 1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}\cdot 0 \end{cases}$$

<u>בדרך אחרת</u>
ממצב 0 עוברים בהכרח למצב 1 לאחר יחידת זמן אחת. ממצב 1 עוברים לאחר זמן המתפלג $G\left(\frac{2}{3}\right)$ למצב 2 וממצב 2 עוברים למצב 3 לאחר זמן המתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$. לכן התוחלת המבוקשת שווה ל $1 + \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 5.5$.

ג. קבוצת המצבים היא $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ ומטריצת המעבר היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שימו לב שיש כאן רק שינוי בשמות של מצבי השרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, כאשר למשל מצב 3 הופך להיות כאן למצב 1.

ד. התהליך אינו בהכרח שרשרת מרקוב. נראה זאת על-ידי דוגמא:

נניח ש X יכול לקבל את הערכים 2 ו 4. במקרה זה הערך חצי בתהליך $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ יכול להתקבל אם כדור אחד מתוך שני כדורים הוא ירוק או ששני כדורים מתוך ארבעה הם ירוקים. אם ידוע שבשלב שלפני כן פרופורצית הירוקים היתה 0, אז סימן שיש כדור ירוק אחד מתוך שני כדורים ולכן יש מעבר ישיר למצב 1. אם לעומת זאת בשלב הקודם פרופורצית הירוקים היתה רבע, אז אין מעבר ישיר למצב 1.

<u>הערה</u>

אין לנמק רק בהתייחס לערכים שונים של X. יש להתייחס לתהליך $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלבד ואפשר להסיק מסקנות רק ממנו.

התהליך יכול להיות שרשרת מרקוב. נראה זאת על-ידי דוגמא:

נניח ש X יכול לקבל רק את הערכים 2 ו 3. במקרה זה אם פרופורצית הירוקים היא חצי, אז ברור ש $X=2$ ואם פרופורצית הירוקים היא שליש או שני שליש, אז ברור ש $X=3$. בכל מקרה נוכל לדעת על סמך ההווה, כמה כדורים מכל סוג יש בשלב הנוכחי. פרופורציה של 1 היא תמיד מצב שבו נשארים תמיד. פרופורציה של 0 יכולה להתקבל רק בהתחלה והמעברים ממנה הם לפי ההתפלגות של X שהיא ההתפלגות הראשונית של הפרופורציה.

<u>ה</u>. התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ נקלט במצב ש X שבו כל הכדורים ירוקים. אם המשתנה X הוא מנוון, אז הממוצע של הסדרה $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ שואף לגודל ידוע מראש. לכן במקרה זה החוק החזק חל על הסדרה.

אם X אינו משתנה מנוון, אז יש אפשרויות להיקלט בערכים שונים. לכן סדרת הממוצעים של הסדרה $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינה שואפת לגבול ידוע מראש והחוק החזק לא חל על הסדרה.

עבור כל ערך של X התהליך $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ נקלט בהסתברות 1 במצב 1. לכן סדרת הממוצעים של הסדרה $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ שואפת בהסתברות 1 ל 1. החוק החזק חל על הסדרה עבור כל משתנה X.

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. מצב 0 הוא מצב סופג עבור כל ערך של p. אף פעם לא ניתן לעזוב אותו.

<u>הערה</u>

ההסתברות להגיע למצב 0 ממצב אחר, תלויה בערכו של p. אבל בכל מקרה, אם מגיעים אליו, לא ניתן לעזוב אותו.

<u>ב</u>. זו ההסתברות להכחדות. מכיון שתוחלת מספר הצאצאים של כל פרט גדולה מ 1, אז כאשר מתחילים עם פרט אחד, אז סיכויי ההכחדות הם הפתרון החיובי הקטן של המשוואה $t=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^2$.

פתרון זה הוא $t=\frac{1}{2}$. מכיון שכאן מתחילים עם שני פרטים, אז סיכויי ההכחדות הם $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

<u>ג</u>. הגבול הזה הוא 0. ממצב 2 יש מסלול למצב 0 ואין דרך חזרה אליו. לכן זהו מצב לא ארגודי. לכן זהו מצב חולף וההסתברות הגבולית שלו היא אפס.

<u>הערה</u>

לא בהכרח מגיעים ממצב 2 למצב הסופג 0. יכולים גם לשאוף לאין סוף.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. כל מצבי השרשרת הם נשנים.

התהליך בזמני הקפיצות הוא של הילוך מקרי סימטרי על חצי ישר. לכן בכל מקרה חוזרים לכל מצב.

אם יש קפיצה שבה חוזרים למצב, אז יש גם זמן שבו חוזרים למצב.

<u>הערה</u>

אין וקטור סטציונרי. זה מבטא את העובדה שהמצבים אינם נשנים חיובית. אבל הם כן נשנים.

ב. כל מצבי השרשרת הם חולפים.

מכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית ומכיון שכל מצבי השרשרת הם מחלקה בלתי פריקה אז די להראות שמצב מסוים הוא חולף. אם מצב הוא חולף בתהליך של זמני הקפיצות, אז הוא חולף.
ממצב 100 יכולים ללכת למצב 101. מכל מצב שימינה למצב 100 הולכים בסיכוי שליש שמאלה ובסיכוי שני שליש ימינה. ממצב 101 עלולים לא לחזור למצב 100, כמו שבהילוך על הישר שמוטה ימינה לא בודאות חוזרים ממצב 101 למצב 100. לכן לא בודאות חוזרים ממצב 100 למצב 100.
לכן מצב 100 הוא חולף.

ג. כל מצבי השרשרת הם נשנים.

מכיון שהשרשרת אינה פריקה, אז די להראות שמצב 100 הוא נשנה.
ממצב 100 עוברים למצב 101 או למצב 99.
ממצב 101 בודאות חוזרים למצב 100 כמו שבהילוך סימטרי בודאות חוזרים ממצב 101 למצב 100 (סיכויי החזרה לא מושפעים מכך שמשמאל למצב 100 הסתברויות המעבר הן שונות).
מצב 99 הוא מצב בקבוצה סופית של 100 מצבים שמשמאל למצב 100. מכל אחד ממצבים אלה יש מסלול למצב 100. במחלקה סופית ובלתי פריקה בהסתברות 1 מגיעים לכל מצב באיזשהו שלב.
לצורך מציאת סיכויי החזרה למצב 100 ממצב 99 ניתן להסתכל על מצב 100 כמצב בשרשרת סופית ובלתי פריקה וזאת תוך התעלמות מכך שממצב 100 יש גם מעבר למצבים שמימינה לו.
המעברים למצבים אלה מתבצעים רק לאחר שחוזרים למצב 100.

ד. התהליך $\{Y_t\}$ אינו שרשרת מרקוב.

מכל אחד מהמצבים הטבעיים קצב העזיבה הכולל (ימינה או שמאלה) הוא 2. ממצב 0 קצב העזיבה הוא רק 1. אם התהליך $\{Y_t\}$ מקבל את הערך 1 בזמן מסוים, אז ברור שהיתה בדיוק קפיצה אחת ושאנו נמצאים במצב 0 או במצב 2. בשני מקרים אלה, התפלגות הזמן עד הקפיצה הבאה של התהליך $\{Y_t\}$ היא שונה. אם הזמן t הוא ארוך יותר והיתה רק קפיצה אחת, אז משתנה ההסתברות המותנה שהתהליך המקורי נמצא במצב 0 ולא במצב 2. למעשה, כאשר $t\to\infty$ והיתה רק קפיצה אחת, אז ההסתברות המותנה שהתהליך המקורי נמצא במצב 0 שואפת ל 1. לכן קצבי הקפיצות של התהליך $\{Y_t\}$ תלויים בזמן והתהליך אינו מרקובי.

<u>הערה</u>
אין לנמק את העובדה שהתהליך אינו מרקובי, בקשר שלו לתהליך $\{X_t\}$ ובתלות בערכים שונים שהתהליך $\{X_t\}$ מקבל. תהליך יכול להיות תלוי בתהליך אחר ועדיין להיות מרקובי. למשל התהליך $\{X_t\}$ נותן אינפורמציה לגבי התהליך $\{X_{t+1}\}$, אבל התהליך $\{X_{t+1}\}$ הוא מרקובי.
בבדיקה אם תהליך הוא מרקובי, אפשר רק להסיק מסקנות מהערכים שהוא עצמו מקבל. מהם אפשר להסיק מסקנות על תהליך אחר.
<u>הערה</u>
העובדה שהזמן עד קפיצה מסוימת (למשל השניה) אינו מתפלג כסכום של משתנים מקריים מעריכיים, איננה מוכיחה שהתהליך אינו שרשרת מרקוב בזמן רציף. התופעה הזאת קורת גם בשרשרות מרקוב בזמן רציף.

שלומי