

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

שאלה 1 (36 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח שמתקיים $(X_0 = 3)$.

יהי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי ש Z מתפלג,

כאשר $P(Z=2) = \frac{2}{3}$, $P(Z=0) = \frac{1}{3}$. נניח שמתקיים $(Y_0 = 1)$.

נניח ששני התהליכים $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם בלתי תלויים.

- א. מצאו מערכת משוואות לחישוב תוחלת מספר הצעדים עד שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב נשנה. אין צורך לפתור את המערכת.
- ב. מהי ההסתברות שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב נשנה לראשונה לאחר 3 צעדים?
- ג. מצאו את כל הוקטורים הסטציונרים של התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- ד. מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1)$?

שאלה 2 (36 נקודות)

במונח שרשרת מרקוב הכוונה היא, כמו תמיד, לתהליך מרקוב הומוגני.

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים של כל הטבעיים ומצב התחלתי i .
יהי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ התהליך המונה את מספר הביקורים של התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ במצב j החל משלב 0 ועד השלבים השונים.
בכל אחד מהמקרים הבאים עליכם לקבוע אם יתכן שהתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב.
אם הדבר יתכן, עליכם לתת דוגמא מפורשת של שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתאימה.
אם הדבר לא יתכן, עליכם לנמק זאת.

- א. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב שכל מצביה לא ארגודים, ומתקיים $(i = j = 1)$.
- ב. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית חיובית, ומתקיים $(i = j = 1)$.
- ג. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית אפס, ומתקיים $(i = j = 1)$.
- ד. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה וחולפת, ומתקיים $(i = 1, j = 2)$.

שאלה 3 (36 נקודות)

בתחנת שרות יש שרת אחד שיכול בכל זמן לתת שרות ללקוח אחד לכל היותר. משך שרות מתפלג מעריכית עם תוחלת של שעה אחת. ברגע הזמן 0 נפתחת התחנה ומרגע זה יכולים להגיע לקוחות. מופע הלקוחות לתור הוא פואסוני בעוצמה של λ לשעה. בתחנה יש מקום המתנה יחיד. לקוח המגיע לתחנה כאשר יש לקוח אחד בשרות ואין ממתנים, ממתין במקום ההמתנה עד שיתקבל לשרות עם תום הטפול בלקוח המשורת. לקוח המגיע כאשר יש כבר ממתין אחר, נדחה ולא מצטרף לתור הממתנים לשרות.
יהי $X(t)$ מספר הלקוחות שבתחנה בזמן t .

- א. מצאו את היוצר האינפניטיסימלי של התהליך $X(t)$.
- ב. מהי ההסתברות שעם עזיבת הלקוח שהגיע ראשון לתחנה, לא יהיו לקוחות בתחנה?
- ג. מהי לאורך זמן פרורפורצית הלקוחות שנדחים?
- ד. יהי $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ התהליך המונה את מספרי הלקוחות שבתחנה בזמני הקפיצות של התהליך $X(t)$.
האם החוק החזק חל על הסדרה $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$?