פתרון לבחינה מ 21/07/15

שאלה 1

א. יהי e_2 - תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב נשנה כאשר מתחילים במצב 2.
יהי e_3 - תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב נשנה כאשר מתחילים במצב 3.
מבוקש כאן e_3.
מתקיים

$$\begin{cases} e_2 = 1 + 0.1\cdot 0 + 0.2e_2 + 0.3e_3 + 0.3\cdot 0 + 0.1\cdot 0 \\ e_3 = 1 + 0.4e_2 + 0.6e_3 \end{cases}$$

הערה
יש שתי מחלקות של מצבים נשנים. לאף אחת מהן לא מגיעים בודאות. לכן, תוחלת מספר הצעדים עד הגעה לאחת מסוימת מהן אינה מוגדרת.

ב. $0.6\cdot 0.4(0.1+0.3+0.1)+0.4\cdot 0.2(0.1+0.3+0.1)$

ג. יש שתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים. הראשונה היא $\{1\}$ והשניה היא $\{4,5\}$.
במחלקה בלתי פריקה יש וקטור סטציונרי יחיד.
כאן במחלקה הראשונה הוקטור הסטציונרי הוא (1).
הוקטור הסטציונרי במחלקה $\{4,5\}$ מקיים:

$$\begin{cases} \pi_4 = 0.5\pi_4 + \pi_5 \\ \pi_5 = 0.5\pi_4 \\ \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

ומתקבל $\pi_4 = \frac{2}{3}$, $\pi_5 = \frac{1}{3}$.
לכן אוסף כל הוקטורים הסטציונרים של השרשרת הוא
$\alpha(1,0,0,0,0)+(1-\alpha)\left(0,0,0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ עבור כל $0 \le \alpha \le 1$.

ד. בתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא $\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}>1$.
לכן התהליך לא יכחד בודאות וסיכויי ההכחדות שלו הם הפתרון החיובי הקטן ביותר של המשוואה $t=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot t^2$. הפתרון הזה שווה ל 0.5.
התהליך ייספג במצב 0 בסיכוי 0.5 ובסיכוי 0.5 ישאף לאין סוף.
מתקיים $(X_0=3)$. לכן אם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ייספג באפס, אז לא עבור n מספיק גדול, לא יתקיים $(X_{Y_n}=1)$.
אם לעומת זאת, תהיה שאיפה לאין סוף, אז יתקיים $(X_{Y_n}=1)$, אם התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יקלט במצב 1. התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ נקלט בבדיוק אחת מהמחלקות של המצבים הנשנים. מעבר מהמצבים החולפים למצבים נשנים מתקיים רק מממצב 2. לכן סיכויי המעבר למצב 1 ממצבים 2 ו 3 הם שווים. הסיכוי להגיע למצב 1 מקיים $\alpha=0.1\cdot 1+0.2\alpha+0.3\alpha+0.3\cdot 0+0.1\cdot 0$ והוא שווה ל

. 0.2

לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} P\left(X_{Y_n}=1\right)=0.5\cdot 0+0.5\cdot 0.2=0.1$

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. יתכן

אם בתהליך $\left\{X_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים עבור כל i , $P_{i,i+1}=1$, אז לאחר שמתחילים במצב 1, לא ניתן לחזור אליו. לכן אברי הסדרה $\left\{Y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ מקבלים רק את הערך 1, כי היה רק ביקור אחד בשלב 0 במצב 1. כל אחד מהם מקבל רק את הערך 1 בלי שום קשר לעבר. לכן סדרת המשתנים $\left\{Y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב.

<u>ב</u>. יתכן

אם סדרת המשתנים $\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים מקריים ב"ת ושווי התפלגות כך ש עבור כל n ועבור כל k טבעי מתקיים $P\left(X_n=k\right)=0.5^k$. אז השרשרת $\left\{X_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ היא בלתי פריקה ונשנית חיובית. בכל שלב, התהליך $\left\{Y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ עולה ביחידה אחת בסיכוי חצי ונשאר באותו מקום בסיכוי חצי (כי בסיכוי חצי התהליך $\left\{X_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ עושה ביקור נוסף במצב 1).

<u>ג</u>. לא יתכן

נניח בשלילה שהתהליך $\left\{Y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ הוא מרקובי. נשים לב שהתהליך $\left\{Y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ יכול בכל שלב רק להישאר באותו מצב שבו הוא נמצא או לעלות ביחידה אחת. מכיון שהתהליך $\left\{X_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ הוא נשנה, אז התהליך $\left\{Y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ לא יכול להישאר תמיד במצב 1. לכן מתקיים $P\left(Y_{n+1}=2\mid Y_n=1\right)=\alpha$, כאשר α הוא קבוע חיובי. לכן התפלגות מספר הצעדים עד ביקור נוסף במצב 1, היא גיאומטרית. לכן היא בעלת תוחלת סופית. לכן, זמן החזרה של התהליך $\left\{X_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ למצב 1 הוא בעל תוחלת סופית ומצב 1 הוא נשנה חיובי. כך קבלנו סתירה.

<u>ד</u>. לא יתכן

נניח בשלילה שהתהליך $\left\{Y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ הוא מרקובי. מכיון שהשרשרת $\left\{X_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ היא בלתי פריקה, אז יש הסתברות חיובית להגיע ממצב 2 למצב 1.
יש גם הסתברות חיובית לחזור ממצב 1 למצב 1. לכן לא יתכן שיתקיים $P\left(Y_{n+1}=2\mid Y_n=1\right)=0$. בגלל ההומוגניות של התהליך $\left\{Y_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים $P\left(Y_{n+1}=2\mid Y_n=1\right)=\alpha$. כך קיימת התפלגות (גיאומטרית) שמקבלת רק ערכים סופיים של זמן החזרה למצב 1. זו סתירה לכך שמצב 1 הוא חולף.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 1 & -\left(1+\lambda\right) & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>ב</u>. מטריצת המעבר בזמני הקפיצות היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{1+\lambda} & 0 & \frac{\lambda}{1+\lambda} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כשמגיע לקוח, עוברים למצב 1. התחנה נשארת ריקה עם עזיבתו, אם ממצב 1 עוברים ישירות למצב 0. זה קורה בסיכוי $\frac{1}{1+\lambda}$ (צריך שהמעבר הראשון ממצב 1 יהיה למצב 0 ולא למצב 2).

ג. במצב 2 ורק בו לקוחות נדחים. לכן פרופורצית הלקוחות שנדחים שווה להסתברות הסטציונרית של מצב 2. נמצא את וקטור ההסתברויות הסטציונריות:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - (1+\lambda)\pi_1 + \pi_2 = 0 \\ \lambda\pi_1 - \pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

מתקבל $\pi_2 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}$.

ד. החוק החזק חל על הסדרה.

בזמנים אי זוגיים בהכרח שוהים במצב 1. לכן סדרת הממוצעים המצטברים של הסדרה $\{Y_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ תמיד שווה ל 1. ממצב 1 תמיד עוברים בסיכוי $\frac{1}{1+\lambda}$ למצב 0 ובסיכוי $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ למצב 2, וזאת באופן ב"ת בין פעמים שונות. לכן סדרת המשתנים $\{Y_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת ושווי התפלגות.
המשתנים האלה גם חסומים, לכן יש לכל אחד מהם אותו מומנט סופי. לכן, חל על הסדרה החוק החזק של המספרים הגדולים, זאת אומרת, שסדרת הממוצעים המצטברים שלהם שואפת בהסתברות 1 לגבול.
סדרת הממוצעים המצטברים של הסדרה $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת בהסתברות 1 לגבול שהוא הממוצע בין גבול זה ו 1.
בנימוק זה השתמשנו בכך שיש לנו שתי סדרות של משתנים מקריים ב"ת שבכל אחת מהן, המשתנים הם שווי התפלגות.

<u>הערה</u>

אפשר היה גם לנמק אחרת:סדרת המשתנים המקריים $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים מקריים ב"ת ובעלי מומנט רביעי סופי. החוק החזק חל עליה, למרות שהמשתנים אינם שווי התפלגות.

שלומי