פתרון לבחינה מ 20/09/15

שאלה 1

א. יהי e_1 - תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב נשנה כאשר מתחילים במצב 1.
יהי e_2 - תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב נשנה כאשר מתחילים במצב 2.
מבוקש כאן e_1.
מתקיים

$$\begin{cases} e_1 = 1 + 0.1e_1 + 0.2e_2 + 0.3 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0 \\ e_2 = 1 + 0.4e_1 + 0.6 \cdot 0 \end{cases}$$

ב. יש מספר סופי של מצבים. לכן בודאות מגיעים למחלקה של מצבים נשנים.
המחלקה $\{3,4\}$ היא המחלקה היחידה של מצבים נשנים. לכן בודאות מגיעים אליה.
המחלקה $\{3,4\}$ היא לא מחזורית. לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,4}^{(n)} = \pi_4$, כאשר π_4 היא ההסתברות הסטציונרית של מצב 4.
מתקיים

$$\begin{cases} \pi_3 = 0.5\pi_3 + \pi_4 \\ \pi_4 = 0.5\pi_3 \\ \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

לכן $\pi_4 = \frac{1}{3}$.

ג. מכיון שמתחילים במצב 1, אז התפלגות X_1 נתונה בשורה הראשונה של מטריצת המעבר.

$$P(X_1 = 1) = 0.1 \quad , \quad P(X_1 = 2) = 0.2 \quad , \quad P(X_1 = 3) = 0.3 \quad , \quad P(X_1 = 4) = 0.4$$

$$P(X_2 = 1) = 0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.09$$

$$P(X_2 = 2) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$$

$$P(X_2 = 3) = 0.1 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 1 = 0.7$$

$$P(X_2 = 4) = 0.1 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.19$$

ד. יש התפלגות אחת כזאת.
יש וקטור סטציונרי יחיד. וקטור סטציונרי הוא נקודת שבת. עם מתחילים בהתפלגות שזהה להתפלגות הסטציונרית, אז לכל המשתנים יש התפלגות שזהה להתפלגות הסטציונרית.
אם מתחילים בוקטור התפלגות אחר אז יש שאיפה לוקטור הסטציונרי ולכן המשתנים אינם שווי התפלגות.

שאלה 2

א. קיימת שרשרת כזאת.
נתן דוגמא של שרשרת על כל השלמים:
יש מחלקה של הילוך מקרי סימטרי על כל השלמים האי זוגיים, זאת אומרת שעבור כל שלם i מתקיים $P_{2i+1,2i-1} = P_{2i+1,2i+3} = 0.5$. כל מצבי מחלקה זו הם נשנים אפס.
עבור המצבים הזוגיים מתקיים: $P_{4i,,4i} = 1$, $P_{4i-2,4i} = 1$. כך כל המצבים שהם כפולה של 4 הם סופגים וכל הזוגיים האחרים הם חולפים.

ב. קיימת שרשרת כזאת.
נתן דוגמא של שרשרת כזאת על כל השלמים:
עבור כל $-\infty < i < \infty$ מתקיים $P_{i,i} = P_{i,i+1} = 0.5$. אם חוזרים למצב, אז זה קורה בהכרח אחרי צעד אחד.

ג. קיימת שרשרת כזאת.
נתן דוגמא של שרשרת כזאת על כל השלמים.
עבור כל $i \geq 1$ מתקיים $P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = 0.5$.
עבור כל $i \leq -1$ מתקיים $P_{i,0} = 1$.
מתקיים $P_{0,1} = 0.5$ ועבור כל $i \leq -1$ מתקיים $P_{0,i} = 0.5^{i-1}$.
מכל מצב שלילי בהכרח חוזרים למצב 0 בצעד אחד.
ממצב 0 יכולים לעבור למצב 1, ומשם בהסתברות 1 חוזרים ל 0, כפי שבהילוך מקרי סימטרי בהסתברות 1 חוזרים מ 1 ל 0. אבל ממצב 1 תוחלת מספר הצעדים לחזרה ל 0 היא אין סוף, כפי שתוחלת מספר הצעדים להגעה מ 1 ל 0 בהילוך מקרי סימטרי שווה לאין סוף. לכן מצב 0 הוא נשנה אפס.

ד. לא קיימת שרשרת כזאת
נניח בשלילה שקיימת שרשרת כזאת, אז קיים לפחות מצב אחד i שממנו יש מעבר ישיר למצב 0. ממצב זה עוברים בסיכוי מסוים ישירות למצב 0 , ואם לא, אז עוברים למצבים אחרים שגם מהם הסיכוי להגיע למצב 0 הוא 0.5 . לכן הסיכוי להגיע ממצב i למצב 0 הוא גדול מ 0.5 .
קבלנו סתירה.

שאלה 3

א. מתקיים $\Lambda_{0,0} = -\lambda$, $\Lambda_{0,1} = \lambda$.
מתקיים עבור כל $i \geq 1$ שלם: $\Lambda_{i,i-1} = 1$, $\Lambda_{i,i} = -(\lambda+1)$, $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$.

ב. נסתכל על מטריצת המעבר בזמני הקפיצות:
עבור כל $i \geq 1$ מתקיים $P_{i,i-1} = \frac{1}{1+\lambda}$, $P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.
עבור $\lambda \leq 1$ בודאות חוזרים למצב 0 אין סוף פעמים, כפי שבהילוך מקרי שמוטה שמאלה בודאות חוזרים מכל מצב חיובי למצב 0. לכן מספר הלקוחות שבתחנה לא ישאף לאין סוף.
עבור $\lambda > 1$ יש סחף לאין סוף כפי שבהילוך מקרי שמוטה ימינה יש סחף לאין סוף.
כל לקוח יגיע בזמן סופי. בכל זמן סופי יש רק מספר סופי של לקוחות. לכן כל לקוח יתקבל לשרות באיזשהו שלב.

ג. סחף לאין סוף יש באותם תנאים כמו קודם (אין השפעה של זהות המשורת על זמן השרות ועל גודל התור).
אם אין סחף לאין סוף, אז כל לקוח יתקבל לשרות באיזשהו שלב.
לקוח שמגיע לתחנה כשיש בתחנה $i-1$ לקוחות, יתקבל לשרות רק אם ממצב i נגיע אי פעם למצב $i-1$ (כאשר הוא מגיע, עוברים למצב i וכל מי שיבוא אחריו מקבל עדיפות).
אם יש סחף אז לא בודאות עוברים ממצב i למצב $i-1$.

ד. על פי החוק החזק, ממוצע מספר המגיעים ביחידת זמן שואף ל 2.
על פי החוק החזק, ממוצע מספר המשורתים ביחידת זמן שרות שואף ל 1.
מכיון שעבור $\lambda = 2$, השרשרת חולפת, אז פרופורצית זמן הבטלה תשאף לאפס ופרופורצית הזמן שהשרת נותן שרות, תשאף ל 1. לכן, ממוצע התארכות התור ביחידת זמן שואף ל 1. לכן הגבול הוא אפס.
