

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

שאלה 1 (36 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.15 & 0.25 & 0.55 & 0.05 \\ 0.03 & 0.07 & 0.43 & 0.47 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.

יהי $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך המקיים $W_n = X_{n^2}$ לכל n .

יהי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו Z , כאשר

$$P(Z=2) = \frac{2}{3}, \quad P(Z=0) = \frac{1}{3}$$

א. מצאו מערכת משוואות לחישוב תוחלת מספר הצעדים עד שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב נשנה. אין צורך לפתור את המערכת.

ב. האם התהליך $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב? זאת אומרת, האם הוא מקיים את תכונות המרקוביות וההומוגניות בזמן?

ג. נניח שמתקיים $(Y_0 = X_1)$. מהי בקירוב או בדיוק ההסתברות להכחדות של התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$? האם התשובה היא מקורבת או מדויקת?

ד. נניח שמתקיים $(Y_0 = X_{100})$. מהי בקירוב או בדיוק ההסתברות להכחדות של התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$? האם התשובה היא מקורבת או מדויקת?

שאלה 2 (36 נקודות)

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף $\{X(t)\}$ על מרחב המצבים $\{1,2,3,4\}$ בעלת יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- א.** מצאו את מטריצת המעבר בזמני הקפיצות של התהליך $\{X(t)\}$.
- ב.** האם לתהליך בזמני הקפיצות יש ווקטור סטציונרי?
- ג.** האם יש לתהליך בזמני הקפיצות התפלגות גבולית?
- ד.** עבור התהליך $\{X(t)\}$ מצאו $P_{1,2}(1.5)$.
- ה.** מצאו את ההסתברות שעד זמן $t = 2.3$ יהיו בתהליך $\{X(t)\}$ פחות מ-3 קפיצות.

שאלה 3 (36 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים שווי התפלגות ובלתי תלויים. נסתכל על קבוצת הערכים האפשריים של המשתנים שלגביהם מתקיים התנאי שלפחות עד שלב מסוים הם התקבלו על-ידי יותר משתנים בסדרה מאשר כל ערך אחר. כך למשל אם מתקיים $(X_1 = 9)$, $(X_2 = 7)$, $(X_3 = 8)$, $(X_4 = 8)$, אז הערך 9 מקיים את התנאי, כי בשלב הראשון הוא התקבל, ואף ערך אחר לא התקבל עד אותו שלב. הערך 8 מקיים את התנאי, כי עד שלב 4 הוא התקבל פעמיים שזה יותר ממספר הפעמים שכל ערך אחר התקבל עד אותו שלב. אנו לא יודעים אם הערך 7 מקיים את התנאי. עד שלב 4 הוא לא קיים את התנאי, ואין לנו את רשימת הערכים שהתקבלו על-ידי יתר המשתנים.

יהי M מספר הערכים האפשריים שמקיימים את התנאי.

בחלק מהסעיפים הבאים תוכלו להיעזר בנוסחת סטרלינג שלפיה $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

- א.** האם יתכן $P(M = 1) = 1$?
- ב.** האם יתכן $P(M = 1) = P(M = 2) = 0.5$?
- ג.** האם יתכן $P(M = 2) = 1$?
- ד.** האם יתכן $P(M = 3) = 1$?