פתרון לבחינה מ 13/07/16

שאלה 1

א. יהי e_1 - תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב נשנה כאשר מתחילים במצב 1.
יהי e_2 - תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב נשנה כאשר מתחילים במצב 2.
מבוקש כאן e_1.
מתקיים

$$\begin{cases} e_1 = 1 + 0.15e_1 + 0.25e_2 + 0.55\cdot 0 + 0.05\cdot 0 \\ e_2 = 1 + 0.03e_1 + 0.07e_2 + 0.43\cdot 0 + 0.47\cdot 0 \end{cases}$$

ב. התהליך לא מקיים את תכונת ההומוגניות בזמן. למשל,

$$P(W_1 = 4 \mid W_0 = 1) = P(X_1 = 4 \mid X_0 = 1) = 0.05$$
$$P(W_3 = 4 \mid W_2 = 1) = P(X_9 = 4 \mid X_4 = 1) > 0.05$$

<u>הערה</u>
התהליך כן מקיים את תכונת המרקוביות. בהינתן ערכו של X_{n^2}, הערכים של המשתנים הקודמים בסדרה, כבר לא רלוונטים.

ג. מתקיים $E(Z) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 2 > 1$. לכן כאשר מתחילים עם פרט אחד, סיכויי ההכחדות שווים לפתרון החיובי הקטן של המשוואה $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^2$. פתרון זה הוא $t = 0.5$. מכיון שיש לנו את ההתפלגות המדויקת של X_1, אז ההסתברות להכחדות שווה בדיוק ל

$$0.15\cdot 0.5 + 0.25\cdot 0.5^2 + 0.55\cdot 0.5^3 + 0.05\cdot 0.4^4$$

ד. יש בשרשרת מחלקה אחת בלתי פריקה ובלתי מחזורית. ההתפלגות של X_{100} קרובה להתפלגות הסטציונרית. לכן סיכויי ההכחדות הם בקירוב $\pi_3 0.5^3 + \pi_4 0.5^4$.
מתקיים

$$\begin{cases} \pi_3 = 0.5\pi_3 + \pi_4 \\ \pi_4 = 0.5\pi_3 \\ \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

לכן $\pi_3 = \frac{2}{3}, \pi_4 = \frac{1}{3}$.

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+1} & 0 & \frac{1}{1+1} \\ \frac{1}{1+1} & 0 & \frac{1}{1+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+1} & 0 & \frac{1}{1+1} \\ \frac{1}{1+1} & 0 & \frac{1}{1+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>ב</u>. לתהליך בזמני הקפיצות יש מטריצת מעבר סופית ובלתי פריקה. לכן יש וקטור סטציונרי יחיד. התהליך בזמני הקפיצות הוא מחזורי. לכן לא קיימת התפלגות גבולית.

<u>ג</u>. לתהליך שמתאר את המעברים בין מצבים אי זוגיים ומצבים זוגיים יש יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

יהי 5- המצב שמייצג את קבוצת המצבים $\{1,3\}$ שבשרשרת המקורית.

יהי 6- המצב שמייצג את קבוצת המצבים $\{2,4\}$ שבשרשרת המקורית.

מתקיים

$$P_{5,6}'(t) = 2P_{5,5}(t) - 2P_{5,6}(t)$$

$$P_{5,6}'(t) = 2(1 - P_{5,6}(t)) - 2P_{5,6}(t)$$

$$P_{5,6}'(t) = 2 - 4P_{5,6}(t)$$

למשוואה דיפרנציאלית זו יש פתרונות $P_{5,6}(t) = ce^{-4t} + 0.5$.

לפי תנאי ההתחלה $P_{5,6}(0) = 0$ מתקיים $P_{5,6}(t) = -0.5e^{-4t} + 0.5$.

לכן מתקיים $P_{1,6}(t) = -0.5e^{-4t} + 0.5$. משיקולי סימטריה נקבל $P_{1,2}(t) = -0.25e^{-4t} + 0.25$.

לכן מתקיים $P_{1,2}(1.5) = -0.25e^{-4\cdot 1.5} + 0.25 = -0.25e^{-6} + 0.25$

<u>ד</u>. נשים לב שבכל מצב מבלים זמן המתפלג $\exp(2)$ עד קפיצה.

מספר הקפיצות עד זמן 2.3 מתפלג פואסונית עם פרמטר 4.6 . ההסתברות שיהיו פחות מ 3 קפיצות היא $e^{-4.6} + e^{-4.6}\cdot 4.6 + e^{-4.6}\frac{4.6^2}{2!}$.

<u>שאלה 3</u>

בכל אחד מהסעיפים נתן דוגמא שתראה שהמצב יתכן.

<u>א</u>. אם מדובר בסדרת משתנים שווי התפלגות ומנוונים, אז בכל הפעמים יתקבל אותו ערך.

<u>ב</u>. נניח שמתקיים $P(X_1 = 3) = \frac{2}{3}$, $P(X_1 = 4) = \frac{1}{3}$.

הסיכוי שעד שלב מסוים ההפרש שבין מספר התוצאות 3 למספר התוצאות 4 יהיה k, שווה להסתברות שהילוך מקרי שמתחיל ב 0 ושבו הולכים בכל שלב בסיכוי $\frac{2}{3}$ ימינה ו $\frac{1}{3}$ שמאלה, יהיה באותו שלב במצב k. מכיון שיש סחף, ההילוך הזה בודאי יגיע לחיובים, לכן הערך 3 בודאי יקיים את התנאי.

הסיכוי שהערך 4 יקיים את התנאי שווה לסיכוי שההילוך יגיע אי פעם למצב -1. מכיון שבהילוך

זה יש סחף לימין אז סיכוי זה קטן מ 1. הוא שווה לפתרון הקטן מ 1 של המשוואה $t=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^2$.

פתרון זה שווה ל 0.5 .

ג. נניח שמתקיים $P(X_1=3)=P(X_1=4)=\frac{1}{2}$.

הסיכוי שהערך 3 יקיים את התנאי שווה לסיכוי שהילוך מקרי סימטרי שמתחיל ב 0 יגיע באיזשהו שלב לחיובים.

מכיון שהילוך זה הוא נשנה, בודאי ההילוך יגיע לחיובים והערך 3 יקיים את התנאי בהסתברות 1.

בדומה גם הערך 4 יקיים את התנאי בהסתברות 1.

<u>הערה</u>

דוגמא שבה המשתנים מקבלים יותר משני ערכים בהסתברות חיובית לא יכולה להתאים. אם שלושה ערכים מתקבלים בהסתברות חיובית, אז בהסתברות חיובית ערך אחד יתקבל על-ידי המשתנה הראשון, ערך אחר יתקבל על-ידי המשתנים השני והשלישי, וערך שלישי יתקבל על-ידי המשתנים הרביעי, חמישי ושישי.

ד. נניח שמתקיים $P(X_1=3)=P(X_1=4)=P(X_1=5)=\frac{1}{3}$.

נראה שהערך 3 יקיים את התנאי בהסתברות 1. בדומה גם הערכים 3 ו 4 יקיימו את התנאי בהסתברות 1.

נסתכל על שרשרת מרקוב שבה לכל מצב יש שני פרמטרים. הפרמטר הראשון הוא ההפרש בין מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 3 למספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 4 עד שלב מסוים.

הפרמטר השני הוא ההפרש בין מספר הפעמים שהתקבל 3 למספר הפעמים שהתקבל 5 עד אותו שלב. נראה שהמצב $(0,0)$ הוא נשנה. מכיון שממצב זה יש מסלול למצבים שבהם שני הפרמטרים שליליים, אז בהסתברות 1 נגיע למצבים אלה (נשנות היא תכונה מחלקתית). מזה נובע שבהסתברות 1 התנאי יתקיים לגבי הערך 3.

כדי להגיע מהמצב $(0,0)$ לעצמו ב $3n$ צעדים, צריך לקבל ב $3n$ צעדים את כל אחד משלושת הערכים בדיוק n פעמים. הסיכוי לכך הוא

$$\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}=\frac{(3n)!}{(n!)^3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$$

לפי נוסחת סטרלינג ביטוי זה מתנהג כמו

$$\frac{\sqrt{2\cdot 3\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\left(\sqrt{2n\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)^{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$$

והוא בסדר גודל של $\frac{1}{n}$. מכיון ש $\sum\frac{1}{n}=\infty$, אז לפי הקריטריון לנשנות המצב $(0,0)$ הוא נשנה.

<u>הערה</u>

רק דוגמא שבה רק שלושה ערכים מתקבלים בהסתברות חיובית יכולה להתאים כאן. כדי להבהיר לעצמכם את הסיבה לכך, הסתכלו בהערה לסעיף הקודם.

שלומי