פתרון לבחינה מ 30/09/16

שאלה 1

א. לקוחות מגיעים רק בזוגות לכן מתקיים לכל מצב $i \ge 0$: $\Lambda_{i,i+2} = \lambda$.
השרות הניתן הוא לבודדים ולכן מתקיים לכל $i \ge 1$: $\Lambda_{i,i-1} = 1$.
מתקיים $\Lambda_{0,0} = -\lambda$ ועבור כל $i \ge 1$: $\Lambda_{i,i} = -(1+\lambda)$.

ב. לקוחות מגיעים רק בזוגות. ברגע שיגיע הזוג הראשון, יהיו בתחנה שני לקוחות. הזמן עד הגעת הזוג הראשון מתפלג $\exp(\lambda)$, ולכן הוא בעל תוחלת $\frac{1}{\lambda}$.

ג. התהליך בזמני הקפיצות הוא הילוך מקרי סימטרי על חצי ישר. בהילוך כזה, תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0, היא אין סוף. בכל שלב מחכים זמן בעל תוחלת $\frac{1}{1+1}$ עד הקפיצה מהמצב שבו נמצאים. לכן גם תוחלת הזמן עד חזרה למצב 0 היא אין סוף.

ד. <u>טענה</u>: רק אם מתקיים $a=1$ בנוסף ל $a\lambda < 1$ אז הוקטור הסטציונרי מקיים את תנאי האיזון המפורט.
<u>הסבר</u>: אם $a>1$ אז יש מעברים ישירים מכל מצב i למצב $i+2$, אבל אין מעברים ישירים בכיוון ההפוך, ולכן הוקטור לא מקיים את תנאי האיזון המפורט.
אם $a=1$ עבור כל $i \ge 0$ שכיחות המעברים מהקבוצה $\{0,1,2,\cdots,i\}$ אל מחוצה לה, שווה לשכיחות המעברים אל תוך הקבוצה. כאמור, מעברים מתבצעים רק בין שכנים ולכן תנאי האיזון מתקיים בין שכנים. בין זוגות שאינם שכנים בודאי שמתקיים שיש איזון, כי אין כלל מעברים ביניהם.
<u>הערה</u>
מכיון שכאן היחס בין זמני השהיה הממוצעים במצבים השונים הוא חסום, אז תוחלת זמן החזרה למצב היא סופית אם ורק אם תוחלת מספר הקפיצות עד חזרה היא סופית.

שאלה 2

א. זו שרשרת סופית, בעלת מחלקה בלתי פריקה אחת, לכן יש וקטור סטציונרי יחיד. המחזוריות אינה רלוונטית לקיום ויחידות הוקטור הסטציונרי.

ב. כדי שתהיה אפשרות להיות במצב 3 בזמנים זוגיים, צריך להגיע למצב 2 בזמנים אי זוגיים.

הסיכוי לכך הוא $\frac{2}{3}=\frac{0.5}{1-0.5^2}=\cdots+0.5\cdot0.5^4+0.5\cdot0.5^2+0.5$.

אם זה קורה, אז בכל שלב הסיכוי להיות במצב 3 הוא 0.4 ובמצב 4 הוא 0.6.

לכן הגבול הוא $\frac{2}{3}\cdot 0.4$.

ג. הסיכוי הוא בקירוב $\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 0.4\cdot 0.6$.

<u>הסבר</u>: צריך להגיע לקבוצת המצבים 3 ו 4 בזמנים זוגיים ולבקר בכל אחד מהם פעם אחת בשלבים 100 ו 102. בהינתן שנמצאים בשני המצבים האלה בזמנים זוגיים, אז אין תלות בין הקורה בזמנים זוגיים שונים.

ד. על הסדרה $\{X_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ החוק החזק לא חל. על הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא כן חל.

יתכן שבזמנים זוגיים נמצאים תמיד במצב 2 ויתכן שבזמנים זוגיים נמצאים תמיד במצבים 3 ו 4.

לכן סדרת הממוצעים המצטברים של הסדרה $\{X_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ לא יכולה לשאוף לגבול ידוע מראש.

בהסתברות 1, סדרת הממוצעים של אחת מבין הסדרות $\{X_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{X_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל 2 והאחרת שואפת ל $0.4\cdot3+0.6\cdot4$ (אם למשל בזמנים זוגיים נמצאים במצבים 3 ו 4, אז הסדרה בזמנים זוגיים היא סדרת משתנים בלתי תלויים בעלי מומנט רביעי סופי). סדרת הממוצעים המצטברים של הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת לגבול שהוא הממוצע של שני הגבולות של הסדרות $\{X_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{X_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>הערה</u>

הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה סדרת משתנים בלתי תלויים. אבל אי תלות אינה תנאי הכרחי לקיום החוק החזק. אי תלות היא רק חלק מתנאי מספיק לקיום החוק החזק.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. לא יתכן.

אם אחד משני המצבים הוא חולף, אז נקלטים במצב הנשנה ואחר-כך אין מעברים בין המצבים.
אם השרשרת היא בלתי פריקה, אז שכיחות המעברים ממצב 1 למצב 2 שווה לשכיחות המעברים ממצב 2 למצב 1. אם כל אחת מהן שווה ל 0.5, אז בכל צעד חייבים להחליף מצב והשרשרת היא שרשרת סופית ומחזורית ואין הסתברויות גבוליות.

<u>ב</u>. נתן דוגמא שתראה שזה יתכן.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כאן מצב 1 הוא מצב חולף, אז ההסתברות הגבולית שלו היא 0. אחרי הצעד הראשון בכל צעד עוברים ממצב 2 למצב 3 או ממצב 3 למצב 2.

<u>ג</u>. נתן דוגמא של שרשרת על המצבים $\{1,2,3,4\}$ שתראה שזה יתכן. מטריצת המעבר היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

והמצב ההתחלתי הוא המצב הראשון.

<u>ד</u>. נתן דוגמא של שרשרת על השלמים שתראה שזה אפשרי.

עבור כל מצב חיובי שאינו שווה לשום k^k עבור שום k טבעי עוברים בהסתברות 1 לחיובי העוקב. עבור כל חיובי שהוא מהצורה k^k עוברים בהסתברות 1 לשלילי $-k^k-1$.

עבור כל מצב שלילי שאינו מהצורה $-k^k$ עבור שום k טבעי עושים צעד אחד שמאלה בהסתברות 1. עבור כל שלילי שהוא מהצורה $-k^k$ עוברים בהסתברות 1 לחיובי k^k+1.

אם מתחילים למשל במצב 2, אז יש תקופות שבהן הולכים ימינה ויש תקופות שבהן הולכים שמאלה. מתקיים $\sum_{i=1}^{k-1} i^i << k^k$, כאשר נמצאים לקראת סוף תקופה מסוימות מתקדמת, חלקן של התקופות הקודמות שואף לאפס.

שלומי