

**בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים**

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.  
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.  
בארבעת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.  
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.  
הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .  
נמקו את תשובותיכם!  
אנא השאירו את העמוד הראשון ( צד אחד של דף ) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

**שאלה 1** ( 36 נקודות )

נתונה שרשרת מרקוב  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  של הילוך מקרי על הישר. נניח שבכל שלב עושים צעד אחד ימינה בסיכוי  $p$  וצעד אחד שמאלה בסיכוי  $q = 1 - p$ . נניח שהמצב ההתחלתי הוא 0.

- א.** נניח ש  $p = 0.6$ . מהי תוחלת מספר הצעדים עד שמגיעים לראשונה למצב 1 ?  
**ב.** נניח ש  $p = 0.6$ . מצאו מערכת משוואות לחישוב תוחלת מספר הצעדים עד שמגיעים לראשונה למצב 2 או למצב -2. אין צורך לפתור את מערכת המשוואות.  
**ג.** נניח ש  $p = 0.5$ . מהי ההסתברות שיהיה שלב  $n$  שבו  $(X_n = 6)$  ?  
**ד.** נניח ש  $p = 0.5$ . מהי התפלגות מספר הביקורים במצב 0 עד הביקור הראשון במצב 1 ?

**שאלה 2** ( 18 נקודות )

בתחנת שרות יש שרת אחד שיכול בכל זמן לתת שרות ללקוח אחד לכל היותר. משך שרות מתפלג מעריכית עם תוחלת של שעה אחת. מופע הלקוחות לתור הוא פואסוני בעוצמה של 1 לשעה. בתחנה יש מקום המתנה יחיד. לקוח המגיע לתחנה כאשר יש לקוח אחד בשרות ואין ממתנים, ממתין במקום ההמתנה עד שיתקבל לשרות עם תום הטפול בלקוח המשותר. לקוח המגיע כאשר יש כבר ממתין אחר, נדחה ולא מצטרף לתור הממתנים לשרות. יהי  $X(t)$  מספר הלקוחות שבתחנה בזמן  $t$ .

- א.** מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של התהליך  $X(t)$ .  
מצאו גם את מטריצת המעבר בזמני הקפיצות של התהליך  $X(t)$ .  
**ב.** מהו לאורך זמן אחוז הלקוחות הנדחים מבין כלל המגיעים לתחנה ?

**שאלה 3** (18 נקודות)

יהי  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי ש  $Z$  מתפלג, כאשר  $P(Z=2) = \frac{2}{3}$ ,  $P(Z=0) = \frac{1}{3}$ . נניח שמתקיים  $(Y_0 = 2)$ .

- א.** מהי ההסתברות שהשושלת תכחד באיזשהו שלב?  
**ב.** מהי ההסתברות שהתהליך יבקר באין סוף מצבים חולפים שונים?

**שאלה 4** (36 נקודות)

**א.** נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  בלתי פריקה בת קבוצת המצבים  $\{1,2,3\}$  ומצב התחלתי 1.

תהי  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  סדרת משתנים מקריים שכל אחד מהם מקבל בסיכוי חצי את ערכו של  $X_5$ , ובסיכוי חצי את ערכו של  $X_6$ , וזאת באופן בלתי תלוי בלמי משני המשתנים  $X_5$  או  $X_6$  משתווים המשתנים האחרים שבסדרה  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ .  
האם יתכן ש  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  היא שרשרת מרקוב?

**ב.** נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  בלתי פריקה שמצביה הם חולפים.

תהי  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  סדרת משתנים מקריים שכל אחד מהם מקבל בסיכוי חצי את ערכו של  $X_0$ , ובסיכוי חצי את ערכו של  $X_1$ , וזאת באופן בלתי תלוי בלמי משני המשתנים  $X_0$  או  $X_1$  משתווים המשתנים האחרים שבסדרה  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ .  
האם יתכן שעבור כל מצב התחלתי אפשרי נתון של השרשרת  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ , תהיה  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  שרשרת מרקוב?

**ג.** נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף  $X(t)$  בעלת קבוצת המצבים  $\{1,2\}$  ומצב ההתחלתי 1.

תהי  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  סדרת משתנים מקריים שכל אחד מהם מקבל את הערך שמקבל התהליך  $X(t)$  באיזשהו זמן  $t$ . נניח שעבור כל משתנה  $Y_n$  זמן זה מתפלג אחיד רציף בין 0 לזמן  $t_2$  שבו התהליך  $X(t)$  עזב לראשונה את מצב 2. נניח שבהינתן כל ערך אפשרי של  $t_2$ , הזמנים הנבחרים עבור המשתנים  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  השונים הם בלתי תלויים.  
האם יתכן ש  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  היא שרשרת מרקוב?

**ד.** תהי  $X(t)$  שרשרת מרקוב בזמן רציף. נניח שהסדרה  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא סדרת זמני הקפיצות של התהליך  $X(t)$ .

האם התהליך  $\{X(t_n + 1)\}_{n=1}^{\infty}$  הוא בהכרח שרשרת מרקוב בזמן בדיד?